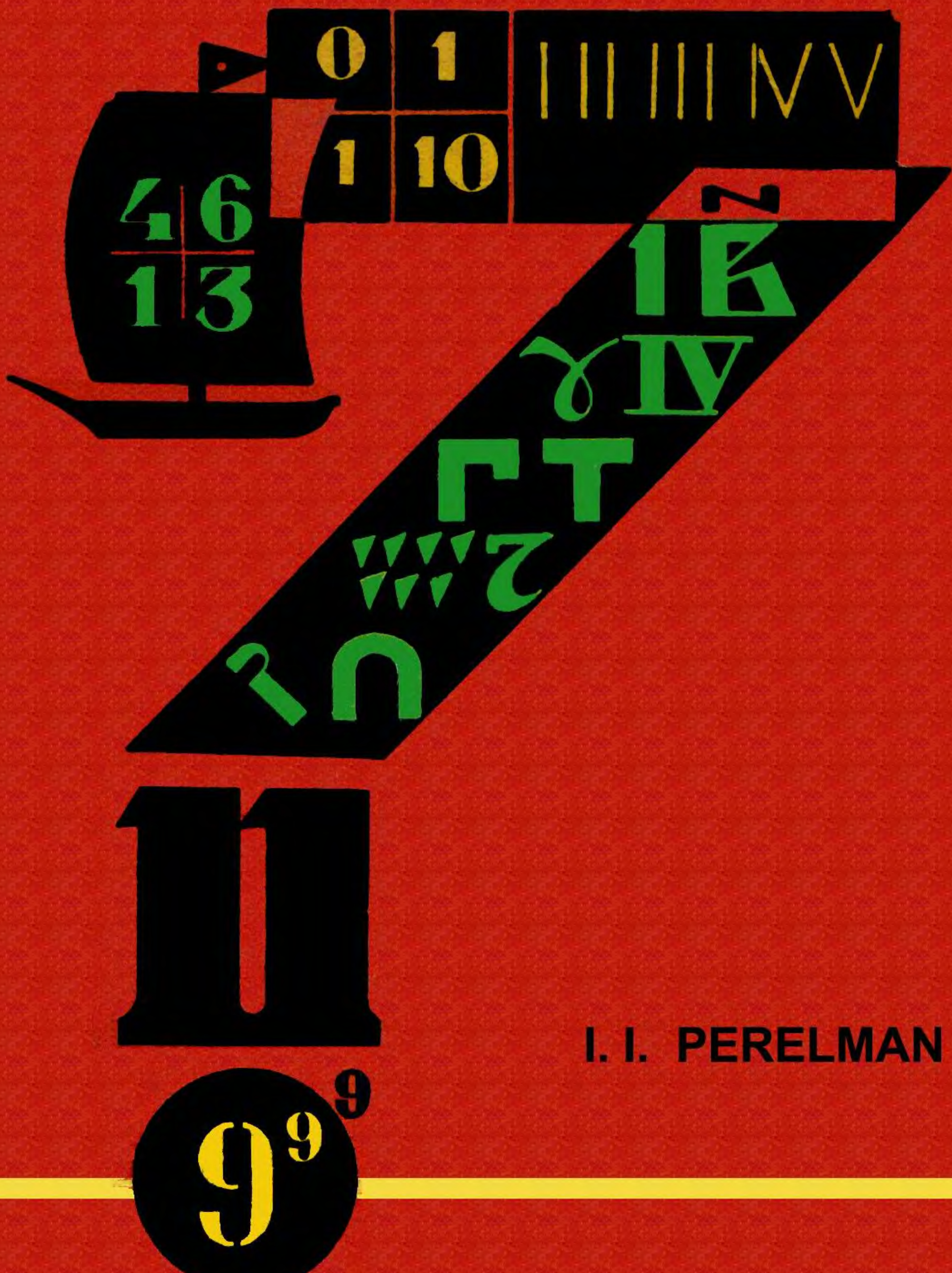
ARITMETICA



I. I. PERELMAN

DISTRACTIVĂ

I. I. PERELMAN

ARITMETICA DISTRACTIVĂ

PROBLEME CURIOASE ŞI GHICITORI
DIN LUMEA CIFRELOR

EDITURA TINERETULUI

Traducere din limba rusă de MARIUS STOKA

Desenele reproduse după originalul în limba rusă
Coperta de *D. IONESCU*

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1959

Cuvînt înainte

În șirul lung al pedagogilor sovietici care au inițiat și au popularizat introducerea învățămîntului politehnic în programul școlilor din U.R.S.S., Iakov Isidorovici Perelman, autorul lucrării „Aritmetica distractivă", tradusă și publicată acum în limba romînă, ocupă un loc deosebit. Prin numeroasele sale scrieri de popularizare a științelor pozitive — articole și cărți distractive de matematică, de fizică, de astronomie și romane științifico-fantastice — el a ușurat unei întregi generații de dascăli și de școlari orientarea spre învățămîntul politehnic, fiind azi unul din cei mai cunoscuți autori ai genului didactic-distractiv. Dacă pînă la Marea Revoluție Socialistă din Octombrie tirajul total al cărților lui n-a trecut de 10 000 exemplare, în anii Puterii Sovietice s-au editat și s-au difuzat peste 5 000 000 exemplare, cu rezultate pedagogice unanim recunoscute.

Felul cum și-a întocmit I.I. Perelman studiile, cărțile și romanele sale satisface cele mai pretențioase exigențe ale genului, trezind simpatie activă față de disciplinele prezentate și interes constant față de frumoasele și uneori surprinzătoarele jocuri ale minții, cu cifre, cu relații matematice și cu cele mai felurite surprize ale cunoașterii științifice. Autorul ne demonstrează posibilitatea de a învăța, distrîndu-ne. Atenția involuntară, lipsită de efort cu care urmărim construcțiile sale științifico-distractive, ne menține integral pe planul jocului, dar acest joc e unul din mijloacele cele mai eficace — la o anumită vîrstă — în acumularea de cunoștințe. Curiozitatea pe care

o generează produce în conștiință o concentrare către activitate însoțită de un sentiment pe care nu-l putem denumi decît interes. Din acest moment jocul își însușește tot mai mult caracterele muncii și ale activității conștiente, îndreptată spre înțelegerea realității.

Munca, spunea marele pedagog sovietic A.S. Makarenko, este participarea omului la producția socială, la crearea de valori materiale și culturale. Jocul nu urmărește astfel de scopuri, dar le favorizează indirect, obișnuind treptat copilul sau adolescentul cu efortul fizic și psihic necesar pentru muncă, dezvoltînd agerimea minții, prezența de spirit, inițiativa, stăpînirea de sine, priceperea de a cîntări împrejurările și obișnuința de a duce lucrurile începute pînă la sfîrșit. Lucrările de știință distractivă ale lui I.I. Perelman corespund tuturor acestor cerințe, efectul lor pedagogic realizîndu-se îndeosebi prin îndrumarea cititorului spre o activitate voluntară precis orientată, spre realizarea unor scopuri conștient fixate. În această perspectivă trebuie privită și înțeleasă și „Aritmetica distractivă".

Iakov Isidorovici Perelman s-a născut în vechea Rusie, la 29 noiembrie 1882, în orașul Belostok din gubernia Grodenenskaia, dintr-o familie de mici slujbași, în care tatăl era contabil, iar mama învățătoare. Studiile primare și medii-reale le-a făcut la școlile din orașul natal, sub ochii părinților, care l-au ajutat să îndrăgească de timpuriu numerele și socotelile și i-au dezvoltat armonios înclinațiile pedagogice. Studiile superioare le-a urmat la Institutul silvic din Petersburg, obținînd în 1909 titlul de silvicultor de categoria I, profesiune pe care n-a exercitat-o, dedicîndu-se de la început carierei profesorale în care s-a evidențiat în mod deosebit, atît în ciclul mediu, cît și în învățămîntul superior.

Adevărata vocație a lui I.I. Perelman era însă cea de scriitor și astfel, încă de pe băncile școlii, colaborează la reviste de popularizare a științei. Primul lui articol apare în „Buletinul guberniei Grodenenskaia" în anul 1899, avînd titlul „În legătură cu ploaia de meteoriți care se așteaptă", unde explică pe înțelesul tuturor semnificația acestui fenomen căruia i se dădeau cele mai felurite interpretări obscurantiste.

Din anul 1901 colaborează la revista „Natura și oamenii", și în continuare la revistele de știință popularizată „În atelierul naturii", „Știința e puterea", „Tehnica tineretului" și „Informatorul științific", publicînd în paginile lor articole din domeniul fizicii, astronomiei și matematicilor, care au contribuit foarte mult la formarea vocației politehnice a tineretului sovietic. Astfel, cunoscutul astronom și doctor în științele fizico-matematice A.G. Masevici recunoaște într-una din scrierile sale că și-a ales profesiunea sub influența cărții lui Perelman „Astronomia distractivă".

Originalitatea scrierilor lui I.I. Perelman apare în lucrările publicate în volum, lucrări de popularizare a științei scrise în genul didactic-distractiv, care cunoaște azi în lume un deosebit succes. Cărțile sale „Matematica vie", „Aritmetica distractivă", „Astronomia distractivă", „Fizica distractivă", „Mecanica distractivă", „Probleme și experiențe distractive" și altele, apărute pînă acum în zeci de ediții, sînt unanim apreciate de cititori și de critică. Ele prezintă, pe sute de pagini, un material vast, selecționat cu deosebita grijă de a apropia cît mai mult teoria de practică și școala de viață.

I.I. Perelman a scris și literatură științifico-fantastică. Primul său roman, cu titlul „Călătorii interplanetare", a apărut în 1924, urmat de romanele „Spre stele cu racheta", „Depărtările", „Zborul în Lună" și altele. În toate autorul susține cu talent și cu entuziasm tineresc ipotezele marilor teoreticieni sovietici ai cuceririi spațiului cosmic, subliniind faptul că voința de a lupta și a învinge este caracteristică numai claselor sociale în ascensiune, claselor care au rol istoric progresist.

Activitatea publicistică a lui I.I. Perelman se completează și cu o seamă de cărți didactice scrise în cursul celor patru decenii de profesorat. Dintre acestea cele mai importante sînt „Geometria și bazele trigonometriei", „Matematica meșteșugarului", „Matematica politehnică" și „Culegeri de probleme de geometrie".

În afara publicisticii, I.I. Perelman a desfășurat și activitate pedagogică la numeroase instituții de învățămînt mediu și superior, dintre care reținem: „Institutul de învățămînt public din Pskov", „Politehnica muncitorească

din Petrograd" şi „Şcoala medie de electrotehnică din Leningrad".

I.I. Perelman iubea tineretul sovietic nu numai ca pedagog, ci şi ca patriot. El era conştient că generaţiei care a înfăptuit revoluţia proletară trebuie să-i urmeze cadre noi, bine pregătite sub raport tehnic, care să poată duce la bun sfîrşit construcţia socialismului. Aceste cadre trebuiau ajutate să-şi însuşească, fără întîrziere, temeinice cunoştinţe fizico-matematice şi să îndrăgească tehnica. Trebuiau găsite, deci, metode noi pentru predarea acestor discipline în şcoli şi îndeosebi metode noi pentru stimularea formelor de învăţămînt fără frecvenţă şi a cursurilor prin corespondenţă. „Făurirea unei discipline noi în muncă — scria V.I. Lenin — făurirea unor forme noi de legături sociale între oameni, făurirea unor forme şi metode noi de antrenarea oamenilor în muncă, aceasta este o sarcină care necesită mulţi ani şi multe decenii". Pe linia acestei recomandări a lui Lenin, I.I. Perelman a întocmit un plan de lungă perspectivă pentru politehnizarea învăţămîntului sovietic, susţinîndu-şi ideea şi prin întemeierea aşa-numitei „ştiinţe-distractive", în care tratarea problemelor de matematică, de fizică şi de astronomie, în stil distractiv, reprezenta, la acea vreme, optimismul cu care noua generaţie sovietică privea viitorul, noua ei concepţie despre muncă şi despre plăcerea de a munci.

Plăcerea de a munci e o calitate morală esenţială omului. A pregăti tineretul înseamnă a-l orienta în primul rînd sub raport moral, a-i insufla dragoste de muncă, a-l pune în situaţia de a se convinge că munca este o plăcere, cea mai importantă necesitate vitală a omului.

Întocmind cărţi de ştiinţă distractivă, I.I. Perelman a investit munca intelectuală cu unele din caracteristicile jocului, a uşurat tineretului apropierea de materialul care pare la început arid, al ştiinţelor fizico-matematice. El a văzut că valoarea educativă a specializării depinde, în primul rînd, de raportul dintre respectiva specializare şi suma cunoştinţelor politehnice ale tinerilor. În consecinţă, în problemele sale distractive el a abordat toate domeniile ştiinţelor.

Plăcerea de a se juca izvorăşte din plăcerea de a fi în acţiune. Sub acest raport munca şi jocul nu se deosebesc

decît prin rezultat. Jocurile intelectuale au o deosebită importanţă pentru tineret, mai ales în urma faptului că plasticitatea spirituală e mult mai mare în timpul creşterii decît în perioada maturităţii.

Problemele publicate de I.I. Perelman în cărţile sale de ştiinţă distractivă sînt luate din cîmpul vast al muncii cotidiene şi sînt prezentate sugestiv şi original. Ele introduc elevii în mod treptat în tainele calculelor şi judecăţilor matematice.

În „Aritmetica distractivă", I.I. Perelman îl apropie pe cititor de tainele numerelor, fără a-l rătăci prin dificultăţi care intimidează şi nici pe cărări care ocolesc realitatea. Cartea începe cu cunoştinţe vechi şi noi despre numere şi sfîrşeşte cu aşa-zise „călătorii aritmetice" în jurul lumii, pe creste de munţi, în adîncuri de oceane sau „stînd pe loc". În 11 capitole şi pe circa 200 de pagini autorul tratează un material vast, însumînd evoluţia principiilor de calcul mecanic cu abaca străveche, dezvoltarea istorică a calculului aritmetic, diferite sisteme de numeraţie, galeria curiozităţilor numerice, scamatoriile numerice, calculele rapide, calculele aproximative, giganţii şi piticii numerici, curiozităţi aritmetice etc.

Meritul cel mai de seamă al „Aritmeticii distractive" este că depăşind pe nesimţite expunerea distractiv-didactică, ne face să urcăm cu încredere şi optimism primele trepte ale alfabetului matematic. Nu se poate imagina o pedagogie mai bună şi o metodă mai eficientă pentru popularizarea acestei discipline.

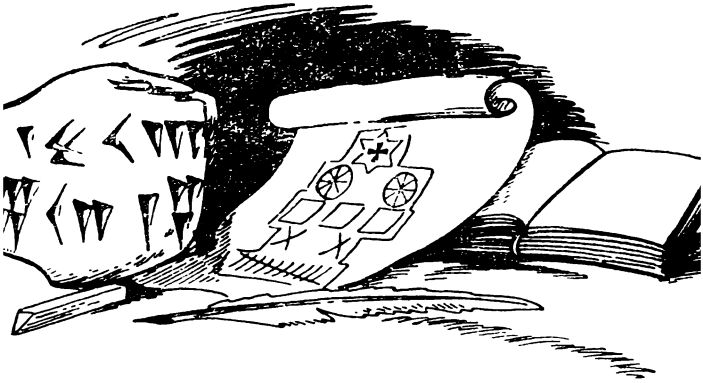
Iakov Isidorovici Perelman nu îşi poartă cititorii pe linia celei mai mici rezistenţe posibile. Nu-i leagănă în răsfăţ, adîcă în credinţa că nu sînt necesare eforturi spre a se obţine cunoştinţe şi deprinderi. El combate, prin toate mijloacele, ca dăunătoare muncii educative, concepţia potrivit căreia jocul este o distracţie, o pierdere inutilă de timp. Copiii se joacă totdeauna în mod serios şi Perelman invită numai la astfel de jocuri, oricît de distractive ar fi ele. În felul acesta scopul pedagogic urmărit este pe deplin atins, iar jocul devine o şcoală a voinţei şi a caracterului.

La începutul Marelui Război pentru Apărarea Patriei, deşi bolnav, I.I. Perelman a desfăşurat o muncă susţinută în mijlocul populaţiei din Leningrad în legătură cu apăra-

rea antiaeriană. Cînd cercul blocadei inamice s-a închis în jurul orașului-erou, el a refuzat propunerile de evacuare, socotind că experiența și cunoștințele sale vor fi utile pentru apărarea Leningradului. Organismul lui slăbit nu a rezistat însă lipsurilor provocate de blocadă și la 16 martie 1942 Iakov Isidorovici Perelman a murit.

Traducerea „Aritmeticei distractive" în limba romînă va fi de un real folos tineretului. Avîntul cu care se dezvoltă industria și agricultura în patria noastră în anii puterii populare aduce cu sine reforme succesive ale învățămîntului de toate gradele, o apropiere tot mai mare a școlii de viață. În aceste condiții, cărțile lui I.I. Perelman pot fi de foarte mare folos tineretului nostru, stimulîndu-i interesul pentru științele fizico-matematice și ușurîndu-i însușirea acestora.

VASILE SUCIU



CAPITOLUL I

VECHI ŞI NOU ÎN NUMERAŢIE ŞI NUMERE

CEA MAI RĂSPÎNDITĂ NUMERAŢIE SCRISĂ

Pentru oricare din voi, cititorii acestei cărţi, nu prezintă nici o greutate să scrieţi un număr întreg oarecare, chiar pînă la un milion. Pentru scrierea numerelor folosim 10 semne bine cunoscute fiecăruia: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, care se numesc c i f r e. Nimănui nu i se mai pare curios că putem scrie orice număr, foarte mare sau foarte mic, întreg sau fracţionar cu ajutorul acestor zece semne (cifre).

Numerele de la 1 pînă la 9 le scriem cu ajutorul a numai una din primele nouă cifre de mai sus. Pentru scrierea numerelor de la 10 pînă la 99 ne folosim de două cifre, dintre care una poate fi şi zero.

Ca bază a numerației luăm numărul „zece", de aceea sistemul nostru de numerație se numește z e c i m a l. Aceasta înseamnă că zece unități simple (unități de ordinul I) formează un zece (o unitate de ordinul al II-lea), zece zeci formează o sută (o unitate de ordinul al III-lea), zece sute formează o mie (o unitate de ordinul al IV-lea) și, în general, fiecare zece unități de un ordin oarecare formează o unitate de ordin imediat superior.

Sistemele de numerație au fost zecimale la multe popoare. Aceasta este legat de faptul că mîinile omului au zece degete.

La scrierea numerelor, în marginea din dreapta scriem cifra care arată numărul de unități simple; în stînga ei scriem cifra care notează numărul zecilor, și mai la stînga cifra ce desemnează sutele; în locul al patrulea din stînga scriem cifra cu care se notează miile etc. Astfel, de exemplu, dacă scriem 2 746, aceasta înseamnă că numărul este format din șase unități, patru zeci, șapte sute și două mii.

Dacă numărul nu conține unități dintr-un ordin oarecare, atunci în locul corespunzător punem un zero. De exemplu, numărul format din trei mii și cinci unități se scrie astfel: 3 005. În acest număr lipsesc zecile și sutele, adică unitățile de ordinul al doilea și al treilea, de aceea în locul al doilea și al treilea din dreapta scriem cîte un zero.

Iată încă o particularitate curioasă a sistemului de numerație pe care-l utilizăm curent: Pentru scrierea numărului 14 742 noi am folosit de două ori cifra 4: o dată pe locul al doilea de la dreapta la stînga, indicînd că numărul respectiv conține 4 zeci; și aceeași cifră 4, aflată pe locul al patrulea de la dreapta spre stînga, arată că acest număr conține patru mii. Prin urmare, una și aceeași cifră poate indica atît numărul unităților cît și cel al zecilor, al sutelor etc., în funcție de poziția pe care cifra o ocupă în scrierea numărului. De aici a și venit denumirea de sistem de numerație p o z i ț i o n a l.

Să ne întoarcem la numărul 2 746, despre care am vorbit mai înainte. În el, prima cifră din dreapta

(cifra 6) înseamnă 6 unităţi, cifra a doua din dreapta (4) arată că e vorba de 4 zeci, adică de numărul

$$40 = 4 \cdot 10;$$

cifra a treia din dreapta (7) înseamnă 7 sute, adică numărul

$$700 = 7 \cdot 10 \cdot 10 = 7 \cdot 10^2,$$

şi, în sfîrşit, cifra a patra (2) indică două mii, adică numărul

$$2\,000 = 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 10^3$$

Prin urmare, numărul 2 746 poate fi scris sub forma

$$2\,746 = 2\,000 + 700 + 40 + 6 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6$$

Fiecare grup de cîte trei ordine din număr formează o clasă. Numărătoarea claselor se face tot de la dreapta spre stînga. Pe primul loc stă clasa întîi, formată din unităţi, zeci şi sute, apoi clasa a doua formată din mii, zeci de mii şi sute de mii; urmează clasa a treia formată din milioane, zeci de milioane şi sute de milioane etc.

V-aţi pus oare întrebarea: de ce se fac atît de simplu, de uşor şi de repede cele patru operaţii cu numere: adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea? Aceasta se realizează pe baza principiului de scriere poziţională a numerelor.

Într-adevăr, atunci cînd avem de făcut o operaţie aritmetică cu numere oarecare noi lucrăm cu zeci, sute şi mii, tot aşa cum am lucra cu ele dacă ar fi simple unităţi, şi numai la obţinerea rezultatului final ţinem seama de ordinul lor.

Prin urmare, pentru scrierea numerelor, noi folosim sistemul de numeraţie zecimal poziţional. Iată ce scrie despre aceasta cunoscutul matematician şi fizician francez Laplace (sec. XVIII-XIX): „Ideea de a exprima numerele prin nouă semne, acordîndu-le în afară de valoarea dată de formă şi pe cea de loc, este atît de simplă, încît tocmai din cauza simplităţii este greu de înţeles cît de minunată este ea".

Aproape întreaga omenire foloseşte acum acest sistem de numeraţie, cu aceleaşi principii de construire a sistemului şi descriere a cifrelor.

Cum a apărut acest minunat sistem de numerație zecimal poziționat?

Cu toată simplitatea lui aparentă oamenii au avut nevoie de cîteva milenii pentru a-l găsi. Și nu vom exagera dacă spunem că la crearea acestui sistem au participat toate popoarele lumii.

Sistemul de numerație zecimal poziționat a apărut la început în India, și la mijlocul sec. al VIII-lea el căpătase deja o mare extindere. Aproximativ în aceeași perioadă sistemul zecimal a pătruns în China și în alte cîteva țări ale Orientului. Europenii au adoptat acest sistem de numerație indian în sec. al XIII-lea, prin intermediul arabilor. De aici i se trage denumirea incorectă de „numerație arabă".

Ce sisteme de numerație au fost folosite înainte de cel zecimal poziționat? Această problemă este destul de interesantă și merită să ne oprim asupra ei mai amănunțit. Numai așa vom avea posibilitatea să apreciem mai bine avantajele sistemului nostru de numerație.

NUMERAȚIA EGIPTEANĂ VECHE

Vom începe cu unul din cele mai vechi sisteme de numerație, cu sistemul de numerație egiptean. El a luat naștere pare-se cu peste cinci mii de ani în urmă, adică cu aproximativ trei mii de ani înaintea erei noastre. În decursul primelor trei milenii sistemul egiptean nu a suferit aproape nici un fel de schimbări. Vom face cunoștință mai îndeaproape cu această numerație veche și vom vedea cum se notau cifrele și cum se scriau numerele cu ajutorul lor.

În numerația egipteană au existat semne speciale (hieroglife) pentru scrierea numerelor: unitate, zece, sută, mie, zece mii, o sută de mii, un milion. Aceste semne sînt reprezentate în figura 1. Pentru a scrie, de exemplu, numărul întreg 23 145 este suficient să se scrie alături două hieroglife cu care se notează zecile de mii, apoi trei hieroglife pentru mii, una pentru sută, patru pentru zeci și cinci hieroglife pentru unitate (fig. 2).

Astfel, la scrierea numărului fiecare hieroglifă poate fi repetată de cel mult nouă ori. În sistemul de numeraţie egiptean nu existau semne pentru zero.

Acest unic exemplu este suficient pentru a înţelege cum scriau numerele vechii egipteni. Sistemul de numeraţie

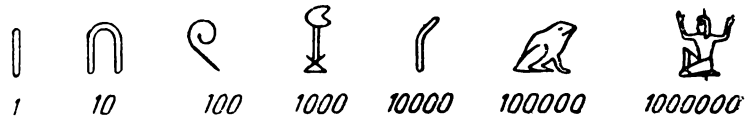


Fig. 1 — Aceste semne (hieroglife) erau folosite de vechii egipteni pentru notarea numerelor.

egiptean este foarte simplu şi primitiv; el este pur zecimal, deoarece în reprezentarea numerelor întregi se recurge la principiul zecimal. În acest sistem de scriere fiecare semn reprezintă doar un număr. Astfel,

Fig. 2 — Scrierea numărului 23 145 în sistemul de numeraţie egiptean.

de exemplu, semnul pentru zece (fig. 1) indică numai zece unităţi şi nu zece zeci sau zece sute. Prin urmare, sistemul de numeraţie egiptean nu este un sistem poziţional.

VECHE NUMERAŢIE POPULARĂ IN RUSIA

După principiul vechii numeraţii egiptene au fost construite sistemele de numeraţie şi la alte popoare, de exemplu la grecii antici. Vom reveni (pag. 20) mai amănunţit asupra acestui sistem de numeraţie.

În vechime, în Rusia era răspîndit destul de mult sistemul popular de numeraţie construit de asemenea

după principiul vechi egiptean; se deosebeau doar semnele prin care se notau numerele.

Este interesant faptul că această numerație populară a fost chiar legiferată; după acest sistem, ceva mai dezvoltat însă, urmau să fie făcute însemnările în caietele de biruri ținute de încasatorii de bir.

« Încasatorul — citim în vechiul „Cod de legi" — primind de la un proprietar de casă banii ce se cuvin statului, trebuie el însuși sau prin scrib să noteze în caietul de biruri, în dreptul numelui proprietarului de casă care a vărsat banii, cîți bani au fost primiți, indicînd mărimea sumei primite prin cifre și s e m n e. Aceste semne sînt aceleași pentru toți și pretutindeni, și anume:

zece ruble să se noteze cu semnul ..... □
rubla ..... ○
zece copeici ..... ×
copeica ..... |
sfertul de copeică ..... —

De exemplu, douăzeci și opt de ruble cinci zeci și șapte copeici și trei sferturi se scriau:

(□□○○○○○○○×××××|||||||≡)».

Într-un alt loc din același volum al „Codului de legi" se mai menționează încă o dată folosirea obligatorie a simbolurilor numerice populare. Se indică simboluri speciale pentru o mie de ruble, sub formă de o stea cu șase colțuri și cu o cruce în centrul ei, și pentru o sută de ruble — sub forma unei roți cu opt spițe. Însă aici simbolurile pentru rublă și pentru zece copeici sînt altele decît cele din legea precedentă.

Iată textul de lege pentru așa-numitele semne de „iasak"[1].

[1] Iasak — bir.

„În fiecare chitanță dată starostelui de clan de la care se va primi iasak-ul, în afara expunerii în cuvinte să fie indicat cu semne speciale numărul de ruble și de copeici primite, astfel încît platnicii să fie convinși

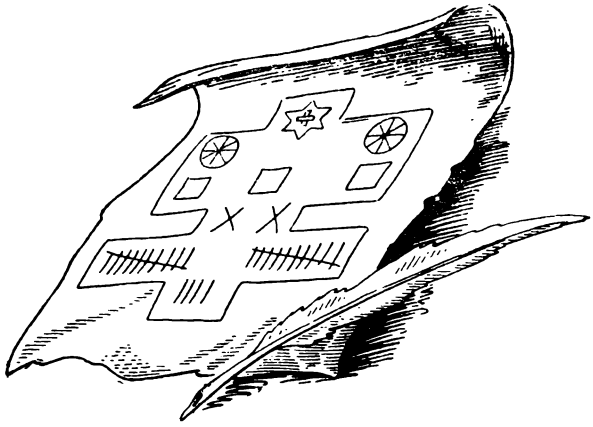


Fig. 3 — Inscripție veche pe chitanța de plată a impozitului („iasak"). Această inscripție indică suma de 1 232 ruble și 24 copeici.

de justețea celor însemnate"[1]. Semnele folosite în chitanță erau:

(steaua) o mie de ruble
(roata) o sută de ruble
□ zece ruble × o rublă
zece copeici | copeica

Ca să nu poată fi făcute nici un fel de adaosuri, aceste semne trebuiau încercuite cu linii drepte. De exemplu, 1 232 ruble 24 copeici se reprezentau ca în figura 3.

NUMERAȚIA ROMANĂ

Dintre toate numerațiile vechi cea romană este poate singura care s-a păstrat pînă în prezent, fiind încă folosită pe o scară largă. Și astăzi cifrele romane sînt

[1] Aceasta arată că semnele descrise erau folosite pe scară largă.

utilizate pentru indicarea secolelor, numerotarea capitolelor din cărți etc.

Pentru scrierea numerelor întregi, în numerația romană trebuie să ținem minte modul de reprezentare a următoarelor șapte numere de bază (fundamentale):

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

Cu ajutorul lor putem scrie orice număr întreg care nu depășește 4 000; unele cifre (I, X, C, M) se pot repeta, dar cel mult de trei ori.

La scrierea numerelor în sistemul roman cifra mai mică poate sta în dreapta celei mari; în acest caz ea i se adaugă. De exemplu, numărul 283 îl scriem în sistemul roman în felul următor:

CCLXXXIII,

adică 200 + 50 + 30 + 3 = 283. Aici semnul care reprezintă suta este repetat de două ori, iar semnele care indică zecile și respectiv unitățile se repetă de cîte trei ori.

Cifra mai mică poate sta și în stînga celei mari, dar atunci ea trebuie scăzută din cea mare. În acest caz repetarea cifrei mai mici nu este admisă. Exemplele de mai jos vă vor ajuta să vă lămuriți pe deplin asupra metodei de scriere a numerelor în sistemul de numerație roman.

Să scriem numerele 94, 944, 1 809, 1 959:

XCIV = 100 — 10 + 5 — 1 = 94
CMXLIV = 1000 — 100 + 50 — 10 + 5 — 1 = 944
MDCCCIX = 1000 + 500 + 300 + 10 — 1 = 1 809
MCMLIX = 1000 + 1000 — 100 + 50 + 10 — 1 = 1959

Ați observat că în acest sistem nu există nici un semn pentru reprezentarea zeroului? Și totuși ne-am lipsit foarte bine de el la scrierea numărului 1 809.

În figura 4 este reprezentată scrierea, în numerație romană, a tuturor numerelor întregi de la 1 pînă la 100.

Cu ajutorul cifrelor romane se pot totuși scrie și numere mai mari. În acest scop, după ce s-au scris

miile se pune jos în dreapta litera m. Pentru exemplificare să reprezentăm numărul 417 986:

$$\text{CDXVII}_{\text{m}}\,\text{CMLXXXVI}$$

Sistemul de numeraţie roman, la fel ca şi cel vechi egiptean, nu este poziţional: fiecare cifră reprezintă

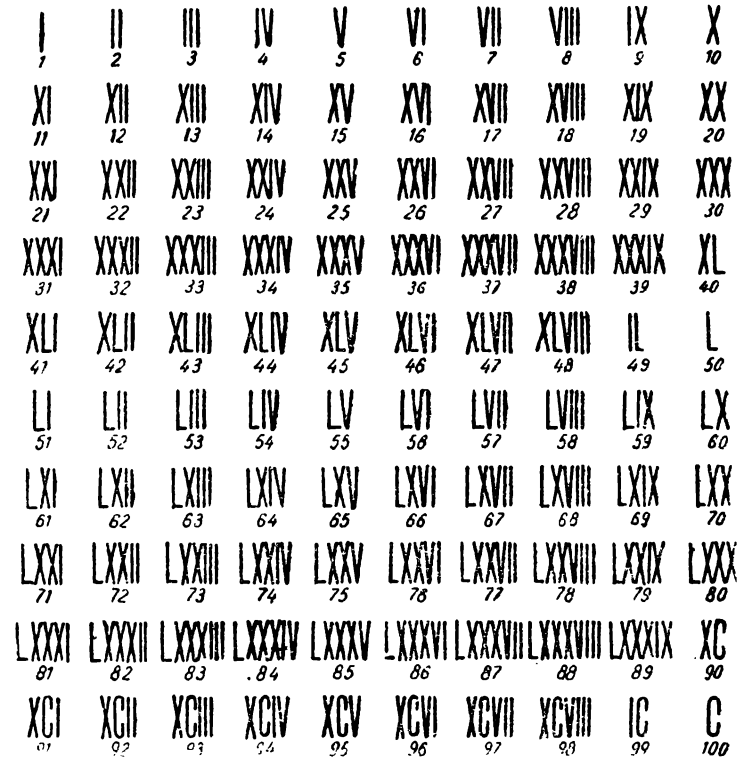


Fig. 4 — Astfel se scriu numerele întregi de la 1 pînă la 100 în sistemul de numeraţie roman.

un singur număr pe deplin determinat. Însă, spre deosebire de sistemul vechi egiptean, cel roman nu este nici pur zecimal. Existenţa în sistemul roman a unor semne speciale pentru numerele cinci, cinci-

zeci, cinci sute arată că în el există urme destul de pronunțate ale sistemului de numerație cincinal [1].

Numerația romană nu este de loc adaptabilă operațiilor aritmetice în formă scrisă. Acesta este marele ei neajuns.

NUMERAȚIA GREACĂ ANTICĂ

Continuăm prezentarea sistemelor de numerație nepoziționale și numai la sfîrșitul capitolului de față vom descrie amănunțit unul dintre cele mai vechi sisteme de numerație (apărut însă mai tîrziu decît cel egiptean) — sistemul babilonian, p r i m u l s i s t e m p o z i ț i o n a l.

Multă asemănare cu sistemul de numerație roman găsim și la numerația așa-zisă a t i c ă sau h e r o -

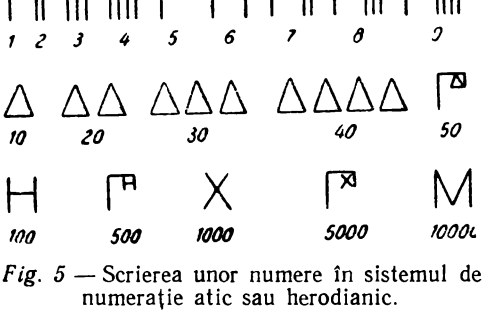


Fig. 5 — Scrierea unor numere în sistemul de numerație atic sau herodianic.

d i a n ă [2], care era folosită în Grecia antică. În figura 5 sînt reprezentate cîteva numere folosite în acest sistem. Desenul arată că spre deosebire de nume-

[1] Sistemelor de numerație diferite de cel zecimal le vom consacra un capitol întreg (vezi Cap. IV).

[2] Herodian — istoric grec din secolul II—III e.n. Din operele lui, oamenii de știință au aflat pentru prima oară despre numerația atică. Cea mai veche mențiune despre această numerație datează din secolul VI î.e.n.

rația romană simbolurile pentru numerele 1, 10, 100, 1 000 pot fi repetate de 4 ori, în schimb este interzis să se scrie numărul mai mic în stînga celui mai mare.

Fig. 6 — Exemple care explică modul de scriere a numerelor întregi în sistemul de numerație atic.

În figura 6 sînt date exemple de scriere a numerelor întregi în sistemul de numerație atic, care explică pe deplin metoda unei astfel de scrieri.

În secolul III î.e.n., în Grecia, în locul numerației atice, începe să se folosească așa-zisa numerație ioniană, în care numerele întregi sînt reprezentate prin literele alfabetului grecesc. Deasupra literelor care reprezintă numere se trage o linioară. Acest sistem de numerație se numește alfabetic.

Numerația alfabetică ioniană este formată din 27 litere (vezi fig. 7; sub fiecare literă este trecută denumirea și valoarea ei numerică). În figura 7 sînt menționate trei litere (fau, coppa și sampi), care în prezent au ieșit din uz. Nu ne putem însă lipsi de ele deoarece sînt necesare 27 de semne pentru notarea celor 27 de numere cheie.

Cu ajutorul tabelei din figura 7 putem scrie ușor orice număr întreg de la 1 pînă la 999 inclusiv. Drept exemplu, vom scrie în numerația ioniană numerele 234, 805, 560:

$\overline{\sigma\lambda\delta}$	$\overline{\omega\varepsilon}$	$\overline{\varphi\xi}$
234	805	560

Fig. 7 — Scrierea numerelor în numerația alfabetică ioniană.

Fig. 8 — Scrierea numerelor în numerația alfabetică **slavă**.

Într-un astfel de sistem de numerație pot fi scrise și numere mai mari decît o mie. Pentru aceasta, lîngă literă (în stînga sus) se pune un apostrof ' (existența apostrofului indică că valoarea literei respective este de o mie de ori mai mare), de exemplu:

'α înseamnă 1 000, 'β înseamnă 2 000,
'ι înseamnă 10 000, 'χ înseamnă 20 000.

Probabil că ați observat că numerația ioniană este zecimală, dar nu și poziționlă. Această mențiune se referă și la celelalte numerații alfabetice.

NUMERAȚIA SLAVĂ

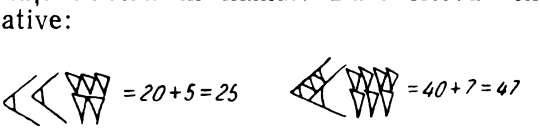
Popoarele slave au folosit și ele numerația alfabetică. În figura 8 sînt reprezentate 27 de litere ale alfabetului slav.

Sub fiecare literă este scrisă valoarea ei numerică. Deasupra literei care reprezintă un număr se pune un semn numit „titlo" (fig. 8).

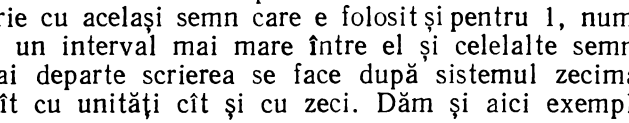
NUMERAȚIA BABILONIANĂ

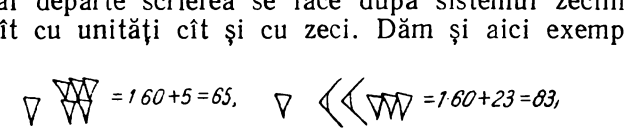
Una din cele mai interesante dintre numerațiile vechi este cea babiloniană, care a apărut aproximativ cu 2 000 de ani înaintea erei noastre. Acesta este primul sistem de numerație poziționlă pe care-l cunoaștem. În sistemul babilonian numerele erau reprezentate numai cu ajutorul a două semne: o pană verticală , cu care se notau unitățile și o pană orizontală , care nota zecile. Astfel de pene se imprimau pe plăci de lut cu niște bețișoare ascuțite de forma unei prisme triunghiulare. De aici a și venit denumirea de „cuneiform" — pe care o poartă scrierea babilonienilor.

Cu ajutorul celor două semne toate numerele întregi de la 1 pînă la 59 se scriau după sistemul zecimal, ca şi în numeraţia egipteană; adică semnele pentru zeci şi pentru unităţi erau repetate de atîtea ori cîte zeci şi unităţi existau în număr. Dăm cîteva exemple explicative:



Pînă aici nu observăm încă nimic deosebit. Începînd însă cu numărul 60 apare o noutate: numărul 60 se scrie cu acelaşi semn care e folosit şi pentru 1, numai cu un interval mai mare între el şi celelalte semne. Mai departe scrierea se face după sistemul zecimal, atît cu unităţi cît şi cu zeci. Dăm şi aici exemple:





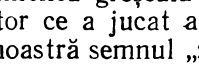
Astfel pot fi reprezentate numerele de la 1 pînă la $59.60 + 59 = 3\,599$.

Mai departe vine unitatea din noua categorie (adică numărul $1.60.60 = 3\,600$), care de asemenea se notează cu semnul prevăzut pentru unităţi, de exemplu:

În felul acesta unitatea de ordinul al doilea reprezentată cu acelaşi semn este de 60 de ori mai mare decît unitatea de ordinul întîi, iar unitatea de ordinul al treilea este de 60 de ori mai mare decît unitatea de ordinul al doilea şi de $60.60 = 60^2 = 3\,600$ ori mai mare decît unitatea de ordinul întîi etc.

— Ei, dar ce facem dacă lipsesc unităţile de un ordin intermediar? veţi spune dumneavoastră. Cum se scrie, de exemplu, numărul $1.60.60 + 23 = 3\,623$? Dacă-l vom scrie sub forma:

atunci el poate fi confundat cu numărul $1.60 + 23 = 83$. Pentru a evita o asemenea greşeală s-a introdus mai tîrziu semnul separator ce a jucat acelaşi rol pe care îl are în numeraţia noastră semnul „zero". Cu ajutorul acestui semn separator numărul 3 623 se scrie astfel:



$= 1 \cdot 60 \cdot 60 + 0 \cdot 60 + 23 = 3623$

La sfîrşitul numărului babilonienii nu puneau niciodată semnul separator. De aceea, numerele 3, $3.60 = 180$, $3.60.60 = 10\,800$ etc. erau reprezentate la fel. Trebuia deci să se ghicească după sensul textului despre care din aceste numere este vorba.

Este interesant faptul că în matematica babiloniană pentru scrierea fracţiilor se folosea aceeaşi scriere ca şi pentru numerele întregi. De exemplu, trei pene verticale scrise alături puteau să însemne $\frac{3}{60}$, sau $\frac{3}{60.60} = \frac{3}{3\,600}$, sau $\frac{3}{60.60.60} = \frac{3}{216\,000}$ etc.

Prin urmare, ce concluzie putem trage acum asupra particularităţilor numeraţiei babiloniene?

În primul rînd observăm că acest sistem de numeraţie este poziţional. Într-adevăr, un acelaşi semn poate să reprezinte atît 1 cît şi 1.60 şi $1.60.60 = 1.60^2 = 1.3\,600$ etc., în funcţie de locul pe care-l ocupă în scriere. Tot aşa ca şi în sistemul nostru de numeraţie, o aceeaşi cifră, de exemplu cifra 2, poate reprezenta numerele: 2, ori $2.10 = 20$, ori $2.10.10 = 2.10^2 = 2.100 = 200$ etc., după locul pe care-l ocupă. Dar principiul poziţional se foloseşte în numeraţia babiloniană numai în ordinele multiple de 60. De aceea ea se numeşte numeraţie poziţională sexagesi-

mală. Numerele pînă la 60 se scriau în acest sistem după principiul zecimal.

În al doilea rînd, numeraţia babiloniană admite scrierea simplă a fracţiilor cu numitori multiplii lui 60, adică a fracţiilor cu numitorul 60, 60.60 = =3 600, 60.60.60 = 216 000 etc.

Fracţiile cu numitori multipli lui 60 au fost, la timpul lor, foarte răspîndite. Chiar şi astăzi noi împărţim o oră în 60 minute, iar un minut în 60 secunde. Tot astfel, împărţim cercul în 360 de părţi, iar fiecare parte constituie un grad; gradul îl divizăm în 60 minute, iar un minut în 60 secunde.

După cum vedeţi sistemul indian de numeraţie pe care-l folosim pe scară largă nu este singurul mijloc de scriere a numerelor.

Au existat încă multe alte metode de reprezentare a numerelor; astfel, de exemplu, mulţi negustori îşi aveau semnele lor secrete pentru notarea numerelor — aşa-numitele „simboluri" comerciale. Să vorbim acum şi despre ele.

„SIMBOLURILE" COMERCIALE SECRETE

În perioada de dinainte de revoluţie [1], pe obiectele cumpărate de la „ofeni" [2] sau din magazinele particulare, mai ales în cele de provincie, se puteau observa adesea însemnări cu litere ca:

a ve v uo

Aceste semne reprezentau preţul fix al obiectului, pe care negustorul rus îl însemna pe marfă, astfel încît el să nu poată fi cunoscut de cumpărător. Aruncînd o privire asupra acestor litere, negustorul le înţelegea sensul ascuns şi, adăugînd un supliment la preţ, spunea cumpărătorului preţul cerut (bineînţeles, încărcat).

[1] Marea Revoluţie Socialistă din Octombrie.

[2] „Ofenia" este negustorul ambulant care vindea în sate obiecte de galanterie, manufactură, cărţi, gravuri.

Sistemul era foarte simplu. Negustorul alegea un cuvînt oarecare, format din zece litere diferite; de cele mai multe ori erau alese cuvintele: „trudoliubie“ [1] „pravosudie“. Prima literă din cuvînt însemna 1, a doua 2, a treia 3 etc; cu litera a zecea era notat zeroul. Cu ajutorul acestor litere-cifre negustorul scria pe mărfuri prețul lor, ținînd în secret „cheia“ sistemului său.

Dacă, de exemplu, era ales cuvîntul:

p r a v o s u d i e
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

atunci prețul de 4 ruble și 75 copeici se scria astfel:

v uo

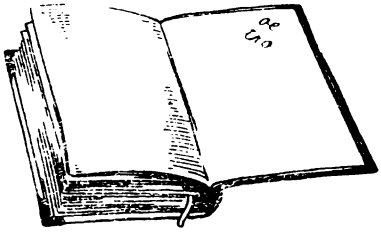


Fig. 9 — „Nota“ comercială de pe copertă (nota reprezentată aici arată că valoarea cărții este de 50 copeici, iar prețul de vînzare 1 rublă și 25 copeici).

Uneori prețul se scria pe marfă sub forma unei fracții; de exemplu, dacă pe o carte era notat (fig. 9)

$$\frac{\text{oe}}{\text{tro}}$$

aceasta, după cheia „trudoliubie“, însemna că prețul cărții este de 50 copeici, iar negustorul cerea pe ea o rublă și 25 de copeici.

PIONI ÎN LOC DE CIFRE

Din cele spuse mai sus este ușor de înțeles că numerele pot fi reprezentate nu numai cu ajutorul cifrelor, ci și al oricăror alte semne sau chiar obiecte: creioane,

[1] În limba rusă diftongul iu se scrie cu o singură literă (ю), astfel încît cuvîntul „trudoliubie“ (hărnicie) este format din zece litere.

peniţe, rigle, radiere etc., dacă convenim să-i atribuim fiecărui obiect semnificaţia unei anumite cifre. Putem reprezenta cu ajutorul acestor cifre-obiecte chiar şi operaţiuni aritmetice cu numere: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea.

Într-o revistă de şah era propusă următoarea problemă: Să se dezvăluie adevăratul sens al exemplului de împărţire al numerelor reprezentată în figura 10, în care aproape toate cifrele sînt înlocuite cu pioni. Din 28 de cifre se cunosc numai două: una (8) la cît şi cealaltă (1) în rest. S-ar părea că este imposibil de găsit valoarea celorlalte 26 de cifre notate cu pioni. Şi totuşi această problemă este relativ simplă pentru oricine, dacă îşi dă seama de sensul diferitelor operaţii care intră în componenţa împărţirii.

Iată raţionamentul care ne conduce la rezultat:

Cea de-a doua cifră a cîtului este, fără îndoială, zero, pentru că la restul de la prima scădere nu s-a coborît o singură cifră, ci două. Într-adevăr, după ce am coborît prima cifră s-a format un număr mai mic decît împărţitorul, iar în astfel de cazuri la cît apare în locul respectiv un zero.

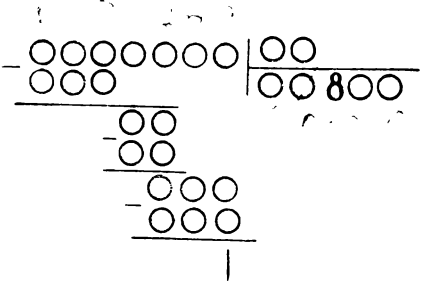


Fig. 10 — Găsiţi sensul adevărat al exemplului de împărţire a numerelor din această figură.

Prin raţionamente asemănătoare stabilim că cea de-a patra cifră a cîtului este de asemenea zero.

Privind bine aşezarea pionilor observăm că împărţitorul format din două cifre, fiind înmulţit cu 8, dă un număr cu două cifre; iar la înmulţirea lui cu prima

cifră (deocamdată necunoscută) a cîtului se obține un număr format din trei cifre. Prin urmare, această primă cifră a cîtului este mai mare decît 8; o astfel de cifră nu poate fi decît 9.

În același mod stabilim că și ultima cifră a cîtului este 9.

Acum cunoaștem cîtul; el este egal cu 90 809. Rămîne să stabilim împărțitorul. După cum se vede în figura 10, împărțitorul este format din două cifre; în afară de aceasta, așezarea pionilor arată că numărul din două cifre, la înmulțirea cu 8, dă tot un număr format din două cifre; dacă însă el este înmulțit cu 9, atunci produsul este format din trei cifre. Ce număr este acesta? Facem încercări începînd cu numărul cel mai mic cu două cifre, 10:

$$10 \times 8 = 80$$
$$10 \times 9 = 90$$

După cum vedem numărul 10 nu satisface condițiile cerute: ambele produse de mai sus sînt numere de cîte două cifre. Facem încercarea cu următorul număr format din două cifre, 11:

$$11 \times 8 = 88$$
$$11 \times 9 = 99$$

După cum se vede, nici numărul 11 nu este bun: din nou ambele produse sînt numere alcătuite din două cifre. Să refacem calculul pentru numărul 12:

$$12 \times 8 = 96$$
$$12 \times 9 = 108$$

Numărul 12 satisface cerințele de mai sus. Oare mai există numere de acest fel? Să încercăm cu 13:

$$13 \times 8 = 104$$
$$13 \times 9 = 117$$

Ambele produse sînt numere formate din trei cifre; prin urmare, 13 nu este bun. Desigur că nici numerele mai mari decît 13 nu pot fi de folos.

Deci, singurul împărțitor posibil este numărul 12. Cunoscînd împărțitorul, cîtul și restul, găsim ușor deîmpărțitul și putem reface întregul proces al împărțirii:

$$\text{deîmpărțitul} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709$$

Așadar, avem următorul exemplu de împărțire inexactă:

$$\begin{array}{r|l} 1089709 & 12 \\ \hline -108 & 90809 \\ \hline \quad 97 & \\ \quad -96 & \\ \hline \quad 109 & \\ \quad -108 & \\ \hline \quad 1 & \end{array}$$

După cum se vede, cunoscînd numai două cifre am reușit să aflăm 26 de cifre necunoscute.

ARITMETICA LA MICUL DEJUN

În fața noastră sînt o serie de operații cu numere notate cu ajutorul pieselor din serviciul de masă (fig. 11). Furculița, lingura, cuțitul, urciorul, ceainicul, farfuria — toate acestea sînt simboluri care înlocuiesc fiecare o anumită cifră.

Privind acest grup de cuțite, furculițe, vase etc. căutați să ghiciți ce anume cifre sînt reprezentate aici.

La prima vedere problema pare foarte grea: trebuie să ghicim adevărate hieroglife, după cum a făcut cîndva francezul Champollion[1]. Problema noastră este de fapt mult mai ușoară: știm doar că aici cifrele, deși sînt notate cu furculițe, cuțite, linguri etc., sînt

[1] Champollion (1790—1832) este un cunoscut filolog francez, fondator al egiptologiei — știință care studiază limba, istoria și cultura Egiptului antic și a țărilor învecinate lui.

totuși scrise după sistemul numerelor zecimale; adică știm că farfuria care se află pe locul al doilea (numărînd din dreapta) este cifra zecilor, că obiectul din dreapta ei este cifra unităților, iar în stînga se află cifra sutelor. Pe urmă, se cunoaște că așezarea tuturor acestor obiecte are un anumit sens, care decurge din esența operațiilor aritmetice efectuate cu numerele reprezentate cu ajutorul lor. Toate acestea pot însemna mult în rezolvarea problemei propuse.

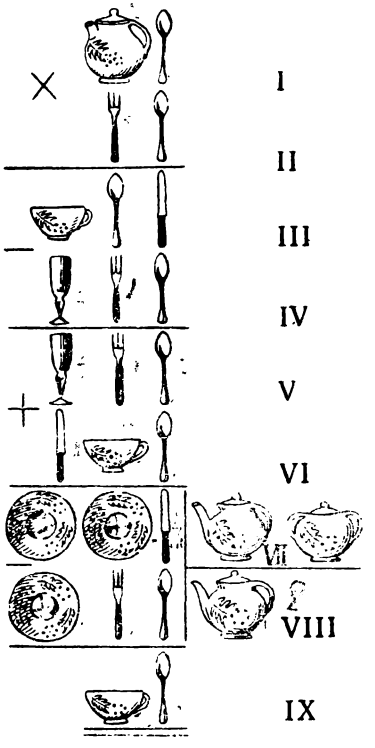


Fig. 11 — Care sînt numerele cu care se efectuează operațiile aritmetice aici?

Iată cum putem găsi sensul obiectelor reprezentate aici: Privind primele trei rînduri din desenul nostru, vedeți că „lingura" înmulțită cu „lingura" dă un „cuțit". În rîndurile următoare se observă că „cuțitul" minus „lingura" dă „lingură" sau că „lingura" + „lingura" = = „cuțit". Care este cifra care dă același rezultat atît la adunare cît și la înmulțire? Această cifră nu poate fi decît doi, pentru că $2 \times 2 = 2 + 2$. Astfel, aflăm că „lingura" = 2 și, prin urmare, „cuțitul" = 4.

Acum mergem mai departe. Ce cifră este notată cu „furculița"? Vom încerca să ghicim privind primele trei rînduri în care furculița participă la înmulțire și rîndurile III, IV și V, unde aceeași furculiță figurează în operațiunea de scădere. Din grupa scăderii

se observă că scăzînd în ordinul zecilor furculiţa din lingură se obţine la rezultat o furculiţă, adică la scăderea 2 — „furculiţa“ se obţine „furculiţa“. Acest lucru se poate întîmpla în două cazuri: fie „furculiţa“ = 1 şi atunci 2 — 1 = 1; fie „furculiţa“ = 6 şi atunci scăzînd 6 din 12 (unitatea de ordin superior se împrumută de la „ceaşcă“) rezultă 6. Ce alegem: 1 sau 6?

Să vedem dacă 6 este potrivit pentru „furculiţă“ şi în celelalte operaţii. Priviţi cu atenţie înmulţirea numerelor aflate în rîndul I şi II. Cînd „furculiţa“ = 6, atunci în rîndul al II-lea se află numărul 62 (noi ştim de acum că lingura = 2). Nu este greu de înţeles că în acest caz în rîndul I trebuie să se afle numărul 12, adică „urciorul“ notează cifra 1. Într-adevăr, dacă „urciorul“ ar fi notat cifra 2 sau orice cifră mai mare, atunci produsul numerelor din rîndul I şi II ar fi fost un număr format din patru şi nu din trei cifre. Astfel, dacă „furculiţa“=6, atunci în rîndul I se află numărul 12, iar în rîndul II este 62. Produsul lor este $12 \times 62 = 744$.

Dar acest lucru nu se poate întîmpla deoarece cifra zecilor din produs este „lingura“, adică 2 şi nu 4, cum am obţinut noi. Prin urmare, nu putem admite că „furculiţa“ = 6, ci trebuie să o acceptăm egală cu unu.

Aflînd pe această cale, prin încercări repetate, că „furculiţa“ înseamnă cifra 1, mergem mai departe cu paşi mult mai siguri şi rapizi. Din operaţia de scădere din rîndurile III şi IV se constată că „ceaşca“ simbolizează fie 6, fie 8. La 8 însă trebuie să renunţăm, pentru că ar însemna că „păhărelul“ = 4, iar noi ştim că cu cifra 4 este notat „cuţitul“. Astfel, „ceaşca“ reprezintă cifra 6 şi, prin urmare, „păhărelul“ — cifra 3.

Ce cifră este notată în rîndul I cu „urcior“? Acest lucru poate fi aflat uşor cunoscînd produsul (rîndul III, 624) şi unul din factorii înmulţirii (rîndul II, 12). Împărţind 624 cu 12, obţinem 52. Prin urmare „ulciorul“ = 5.

Semnul „farfurie“ se determină simplu: în rîndul 7 „farfuria“ = „furculiţa“ + „ceaşca“ = „păhărel“ + „cuţit“, adică „farfuria“ = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Rămîne să se stabilească valoarea cifrică a „ceainicului“ şi a „zaharniţei“ din rîndul 7. Deoarece pentru

cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6 și 7 s-au găsit obiectele respective, rămîne să alegem numai între 8 și 9 și 0. Înlocuind obiectele cu cifrele corespunzătoare, în scăderea reprezentată în ultimele trei rînduri obținem următoarea așezare (cu literele *c* și *z* sînt notate „ceainicul" și „zaharnița"):

$$\begin{array}{l} 774 : cz = c \\ 712 \\ \hline 62 \end{array}$$

După cum vedem, numărul 712 este produsul dintre două numere necunoscute *cz* și *c*, care, desigur, nu pot fi nici zero și nici un număr oarecare terminat în zero, deci, nici *c* și nici *z* nu pot fi zero. Rămîn două presupuneri: $c = 8$ și $z = 9$ sau invers $c = 9$ și $z = 8$. Însă înmulțind 98 cu 8 noi nu obținem 712; prin urmare, „ceainicul" simbolizează 8, iar „zaharnița" 9 (într-adevăr: $89 \times 8 = 712$).

Astfel, pe baza unor calcule aritmetice simple noi am dezlegat scrierea hieroglifică cu obiectele ce fac parte din serviciul de masă:

urciorul înseamnă 5	cuțitul 4
lingura 2	ceașca 6
furculița 1	păhărelul 3
ceainicul 8	zaharnița 9
farfuria 7	

Iar întregul șir de operații aritmetice, reprezentat prin acest serviciu original, capătă următorul sens:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 52 \\ 12 \end{array} \\ \hline - \begin{array}{r} 624 \\ 312 \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} 312 \\ 462 \end{array} \\ \hline - \begin{array}{r} 774 \\ 712 \end{array} \\ \hline 62 \end{array} : 89 = 8$$

Rebusurile aritmetice reprezintă un joc interesant: ghicirea unui cuvînt prin rezolvarea unei probleme asemenea aceleia date în paragraful precedent. De exemplu: să presupunem că o persoană se gîndeşte la un cuvînt format din 10 litere care nu se repetă, cum ar fi „potîrniche", „importanţă". Luînd literele acestui cuvînt drept cifre, se reprezintă cu ajutorul literelor un oarecare caz de împărţire. Dacă cuvîntul ales este „potîrniche", atunci poate fi luat următorul exemplu de împărţire:

p o t î r n i c h e	— 123564	| 3548	— potrnî	| trîc
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	— 10644	34	penîî	tî
deîmpărţitul — potrnî, 123564	— 17124		— pipoî	
	— 14192		pîpho	
împărţitorul — trîc, 3548	2932		ohto	

Reprezentarea în litere a unui anumit caz de împărţire i se înmînează celui ce ghiceşte rebusul şi care trebuie, privind această îngrămădire de litere lipsită de sens la prima vedere, să afle cuvîntul ales. Cititorul ştie deja cum trebuie căutată valoarea cifrică a literelor în cazurile de acest fel; s-a explicat la problema din paragraful precedent. Cu puţină răbdare aceste rebusuri aritmetice pot fi ghicite, dacă exemplul este suficient de lung şi dă un material necesar pentru presupuneri şi verificări. Cînd sînt alese cuvinte care dau un caz de împărţire prea scurt, de exemplu:

i m p o r t a n ţ ă	— ntaor	| impo
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	impo	aă
deîmpărţitul — ntaor, 86745		
împărţitorul — impo, 1234	ptr	

atunci dezlegarea rebusului este foarte grea. În asemenea cazuri trebuie să-l rugăm pe cel care a ales cuvîntul să continue împărţirea pînă la sutimi sau chiar miimi,

adică să obţină la cît încă două sau trei zecimale. Iată un exemplu de împărţire pînă la sutimi:

```
j u d e c ă t o r i        _ uătde | uctă
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0          uctă  | ji, dt
deîmpărţitul — uătde, 26734  _ rtei
împărţitorul — uctă, 2576      ttuo
                             _ uijui
                               joidu
                               uioo
```

Dacă în cazul acesta ne-am fi oprit la numărul întreg (ji), atunci ghicirea cuvîntului ales nu ar fi fost posibilă.

Cuvintele care pot fi alese drept „cheie“ pentru asemenea rebusuri nu sînt chiar atît de puţine pe cît s-ar părea; în afara celor indicate mai sus pot fi folosite cuvintele:

exhaustori , planetobus.

Propunem mai departe cititorului să dezlege singur următorul şir de rebusuri:

Rebusul nr. 1

```
_ mdnţnp | iear
    iear |  iue
_ ţnun
    numa
_ ippnp
  iiţmn
    iruu
```

Rebusul nr. 2

```
_ socnra | dte
    ndso |  das
_ iecr
    isdn
_ oiia
  osor
    cnc
```

Rezolvarea acestor rebusuri o puteţi vedea la sfîrşitul cărţii.

SĂ SE GĂSEASCĂ UN NUMĂR DIN TREI CIFRE

Vom examina încă un rebus aritmetic de un alt tip. Numărul căutat este format din trei cifre diferite A, B, C. Vom scrie acest lucru astfel: ABC, ţinînd

minte că C este cifra unităților, B — a zecilor, A — a sutelor. Trebuie găsit acest număr cînd se știe că:

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{matrix} ABC \\ BAC \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \quad * * * * \\ + \quad * * A \\ * * * B \end{matrix} \\ \hline * * * * * * \end{array}$$

Cu steluțe s-au notat cifrele necunoscute.

Rezolvarea rebusului o facem în ordinea următoare:

Constatăm pentru început că nici A, nici B și nici C nu sînt egale cu 0. Sîntem convinși de lucrul acesta pentru că, în caz contrar, nu s-ar fi putut obține trei produse parțiale.

Observăm mai departe că:

produsul C × A se termină cu A,

Produsul C × B se termină cu B;

deducem de aici că C poate fi ori 1, ori 6. În ce privește 1 raționamentul este evident; pentru 6 el se ilustrează cu exemple:

$$6 \times 2 = 12; \quad 6 \times 8 = 48; \quad 6 \times 4 = 24$$

Celelalte cifre nu au aceste proprietăți. Dacă C ar fi egal cu 1, atunci primul produs parțial nu ar fi format din patru cifre, ci numai din trei. Rămîne, evident, o singură posibilitate, C = 6.

Ne-am convins acum că C = 6 și că, prin urmare, A și B pot fi numai 2, 4 sau 8. Cum cel de-al doilea produs parțial este format numai din trei cifre, înseamnă că A nu poate fi nici 4 și nici 8. Așadar, A = 2.

Pentru B rămîn două posibilități: B = 4 și B = 8. Cum A = 2 și B = 4, ultimul produs parțial ar avea trei, și nu patru cifre. Prin urmare, B = 8.

Astfel, avem: A = 2, B = 8, C = 6. Numărul căutat este 286, iar înmulțirea are forma următoare:

$$\begin{array}{r} 286 \\ \times\ 826 \\ \hline 1716 \\ 572 \\ 2288 \\ \hline 236236 \end{array}$$

SISTEMUL ZECIMAL ÎN RAFTURILE CU CĂRȚI

Sistemul de numerație zecimal își găsește utilizarea pînă și acolo unde s-ar părea că nu ne putem aștepta, și anume în biblioteci, la așezarea cărților pe domenii.

În unele biblioteci publice se folosește o astfel de clasificare a cărților, în care o aceeași carte este notată pretutindeni cu același număr („cifru"). Acest sistem se numește z e c i m a l ; el absolvă cititorul de necesitatea de a consulta catalogul atunci cînd vrea să-și aleagă o carte dintr-un anumit domeniu.

Sistemul este simplu și foarte comod. El constă în aceea că fiecare domeniu de cunoștințe este notat cu un număr, care arată prin el însuși locul ce-l ocupă domeniul respectiv în sistemul general de cunoștințe.

Toate domeniile de cunoștințe sînt împărțite, în primul rînd, la zece; notarea se face cu cifre de la 0 pînă la 9:

0. Publicații cu caracter general.
1. Filozofie.
2. Istoria religiei și literatura antireligioasă.
3. Științe sociale. Drept.
4. Filologie. Limbi.
5. Științe fizico-matematice și alte științe ale naturii.
6. Științe aplicate (medicină, tehnică, agricultură etc.).
7. Artă.
8. Literatură.
9. Istoria, geografia, bibliografiile.

Prima cifră a semnului numeric (adică a cifrului) arată direct, conform acestui sistem, domeniul din care face parte cartea respectivă. Fiecare carte de filozofie

are un cifru care începe cu 1, de matematică — cu 5, de tehnică — cu 6 etc. Dacă, de exemplu, cifrul începe cu 4, atunci, chiar fără a deschide cartea, vom şti că ea face parte din domeniul lingvisticii.

Mai departe, fiecare din domeniile enumerate mai sus se împart în zece subdomenii, care se notează de asemenea cu cifre de la 0 pînă la 9; aceste cifre se scriu în cifru pe locul al doilea. De exemplu, capitolul 5, care conţine cărţile de fizică, matematică şi ştiinţe naturale, se împarte în următoarele subcapitole:

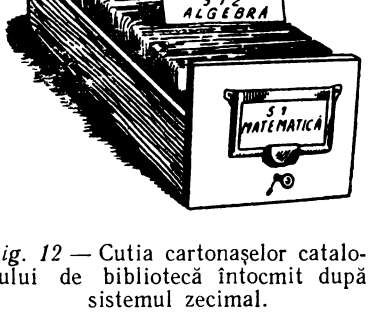


Fig. 12 — Cutia cartonaşelor catalogului de bibliotecă întocmit după sistemul zecimal.

50. Lucrări generale de fizică, matematică şi ştiinţe naturale.
51. Matematica.
52. Astronomia. Geodezia.
53. Fizica. Mecanica teoretică.
54. Chimia. Mineralogia.
55. Geologia.
56. Paleontologia.
57. Biologia. Antropologia.
58. Botanica.
59. Zoologia.

În mod corespunzător se împart şi celelalte capitole. De exemplu, în capitolul ştiinţelor aplicate (6) subcapitolul medicinei se numerotează cu 61; agricultura — 63, comerţ şi căi de comunicaţii — 65; industria chimică şi tehnologie — 66 etc. Tot astfel în capitolul 9 toate cărţile de geografie se notează cu 91 etc.

Adăugînd la primele două cifre o a treia, caracterizăm conţinutul cărţii şi mai precis, arătăm din ce ramură a subdomeniului respectiv face parte (fig. 12). De exemplu, la subcapitolul matematică (51) cifra 1 aşezată în locul al treilea arată că lucrarea face parte din domeniul aritmeticii (511); cu cifrul 512 se notează cărţile de algebră, cu 513 — de geometrie. La capitolul fizicii (53) cărţile de electricitate cu cifrul 537, de optică — 535, de termodinamică — 536.

Într-o astfel de bibliotecă organizată după sistemul zecimal căutarea cărții cerute este foarte mult simplificată. Dacă vă interesează geometria, vă duceți direct la dulapurile unde cifrele încep cu 5, găsiți dulapul unde sînt păstrate cărțile cu cifrul 51... și examinați numai acele rafturi în care se găsesc cărțile cu cifrul 513... Aici sînt adunate toate cărțile de geometrie existente în biblioteca respectivă.

Oricît de bogată ar fi biblioteca nu se poate întîmpla să iasă vreo carte din acest sistem de notare.

SEMNELE ȘI DENUMIRILE ARITMETICE LA DIFERITE POPOARE

Se obișnuiește să se creadă că semnele aritmetice sînt, într-o anumită măsură, internaționale, că ele sînt aceleași pentru toate popoarele de cultură europeană. Aceasta este just doar în ce privește majoritatea semnelor, dar nu pentru toate semnele. Semnele + și —, semnele × și: sînt folosite, cu același sens, atît de nemți, cît și de francezi și englezi. Însă punctul ca semn al înmulțirii nu se folosește la diferite popoare în mod identic. Unii scriu 7.8, alții — 7·8, ridicînd punctul pînă la mijlocul cifrei. Același lucru trebuie să-l spunem și despre semnul cu care indicăm fracția, adică despre semnul care separă partea zecimală de numărul întreg. Unii scriu, ca și noi, 4,5, alții 4.5, iar alții 4·5; așezînd punctul mai sus de mijloc. Englezii și americanii neglijează zeroul din fața fracției zecimale, lucru pe care în continentul european nu-l face nimeni. În cărțile americane întîlnim notații ca: .725, sau ·725, sau chiar ,725 în loc de 0,725.

Nici împărțirea numărului în clase nu se face în același mod. În unele țări se pun între clase puncte (15.000.000), în altele virgule (15,000,000). La noi se obișnuiește să nu se pună între clase nici un semn, lăsînd doar o distanță între ele (15 000 000).

Este interesant de urmărit cum se schimbă denumirea aceluiași număr de la o limbă la alta. De exemplu, numărul 18 îl numim „optsprezece", adică se pronunță

întîi unităţile (8), şi apoi zecile (10). În aceeaşi succesiune este spus acest număr de un german: achtzen, adică 8...10. Francezul pronunţă altfel: 10...8 (dixhuit). Cît de variată este denumirea aceluiaşi număr 18 la diferitele popoare o arată următorul fragment dintr-o tabelă întocmită de un cercetător:

în rusă .....8...10
în germană .....8...10
în franceză.....10...8
în armeană .....10 + 8
în greacă .....8 + 10
în latină.....fără 2, 20
în noua zeelandeză .....11 + 7
în valeză .....3 + 5...10
în lituană .....8 peste 10
în ainosă ..... 10—2 peste 10
în careacă .....3...5 peste 10

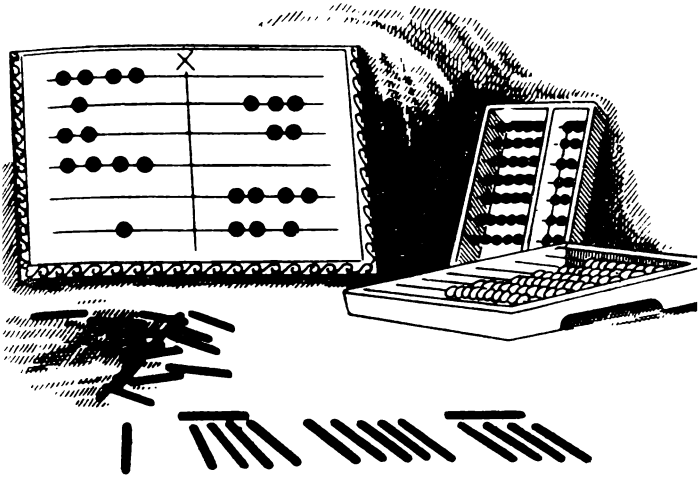
Este curioasă denumirea pe care a căpătat-o acelaşi număr 18 la un trib din Groenlanda: „de pe celălalt picior 3". Cu toate că această denumire este neobişnuită, ea se explică în mod natural prin metoda de a număra cu ajutorul degetelor de la mîini şi de la picioare. Să dezvăluim sensul ei:

numărul	degetelor ambelor mîini.....	10
"	" de la un picior	5
"	" de la celălalt picior	3
	Total	18

Într-un mod asemănător se explică şi denumirea caraibă a numărului 18: „toate mîinile mele, 3, mîna mea" (adică 10 + 3 + 5).

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 \times 5 - 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 1 + 2 \times 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 1 \times 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9 \end{cases}$$



CAPITOLUL II

VECHIUL ABAC ŞI URMAŞII SĂI

PROBLEMA CEHOVIANĂ

Să ne amintim problema de aritmetică, renumită în felul ei, care l-a pus în încurcătură atît de mult pe elevul de clasa a VII-a Ziberov, din povestirea lui Cehov „Meditatorul".

„Un negustor a cumpărat 138 arşini de stofă neagră şi de stofă albastră cu 540 ruble. Cîţi arşini a cumpărat el din fiecare, dacă stofa albastră a costat 5 ruble arşinul, iar cea neagră 3 ruble?"

Cehov descrie cu umor fin cît de mult s-au zbătut la această problemă atît meditatorul cît şi elevul său Petea, de 12 ani; pînă la urmă i-a scos din încurcătură tatăl lui Petea Udodov.

«Petea repetă problema şi pe loc, fără să spună un cuvînt, începe să împartă 540 cu 138.

— Pentru ce împarţi? Stai niţel! De altfel, aşa-i... continuă! Rămîne un rest? Aici nu poate fi rest. Dă-mi tabla, să fac eu împărţirea!

Ziberov face împărţirea, obţine 3 cu un rest şi şterge repede totul.

„Ciudat... gîndeşte el, trecîndu-şi degetele prin păr şi roşind. Cum naiba s-o fi rezolvînd? Hm!... Asta e

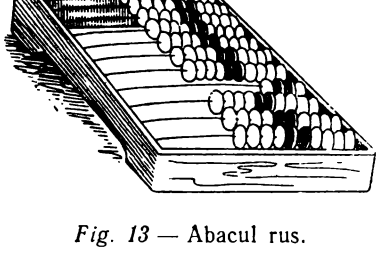


Fig. 13 — Abacul rus.

o problemă de algebră cu două necunoscute şi nu o problemă de aritmetică...“

Meditatorul se uită la soluţii şi vede 75 şi 63.

„Hm!... curios... Oare cum se face ? Se adună 5 cu 3, şi apoi se împarte 540 la 8? Aşa o fi? Nu, nu-i aşa“.

— Hai, rezolv-o! — îi spune el băiatului.

— Ce te gîndeşti atîta ? Problema e simplă de tot! — îi spune şi Udodov lui Petea. — Mare tîmpit mai eşti! Rezolvă-i-o dumneata, Egor Alexeici.

Egor Alexeici ia condeiul în mînă şi se apucă să rezolve. Începe să se bîlbîie, roşeşte, păleşte.

— La drept vorbind, e o problemă de algebră, — spune el. — Poate fi rezolvată prin x şi y. Dar poate fi rezolvată şi aşa. Vezi, facem împărţirea... ai înţeles de ce? Pe urmă scăderea... Pricepi? Sau ştii ce... Gîndeşte-te şi rezolv-o singur pentru mîine...

Petea zîmbeşte şiret. Udodov zîmbeşte şi el. Amîndoi au înţeles încurcătura profesorului. Elevul de clasa a VII-a se ruşinează şi mai rău, se scoală în picioare şi începe să se plimbe dintr-un colţ în altul al încăperii.

— Se poate rezolva și fără algebră, — spune Udodov oftînd și întinzînd mîna spre abac. Poftim...

Ţăcăneşte cu bilele abacului și obţine 75 și 63, ceea ce și trebuia.

— Uite... așa socotim noi, cei fără multă știință.»

Această istorioară, care ne face să rîdem de stînjeneala sărmanului meditator, pune trei probleme noi, și anume:

1. Cum intenţiona meditatorul să rezolve problema pe cale algebrică?

2. Cum trebuia s-o rezolve Petea?

3. Cum a rezolvat-o tatăl lui Petea, la abac, „fără multă știință"?

La primele două probleme, probabil, vom răspunde fără greutate, dacă nu chiar toţi, dar foarte mulţi cititori ai cărţii noastre.

Cea de a treia problemă nu este tot atît de simplă. Dar, să le examinăm pe rînd.

1. Elevul din clasa a VII-a (meditatorul) era gata să rezolve problema „prin x și y", fiind convins de faptul că, „la drept vorbind, e o problemă de algebră". Și el, credem, ar fi rezolvat-o cu ușurinţă recurgînd la ajutorul unui sistem de ecuaţii. Întocmirea unui sistem de două ecuaţii cu două necunoscute, pentru problema dată, este foarte simplă; iată aceste două ecuaţii:

$$x + y = 138,$$

$$5x + 3y = 540,$$

unde x este numărul de arșini de stofă albastră, iar y — de stofă neagră.

2. Problema poate fi rezolvată ușor și pe cale aritmetică. Dacă aţi fi nevoiţi să o rezolvaţi, aţi începe cu presupunerea că întreaga cantitate de stofă cumpărată a fost albastră. Atunci pentru 138 arșini de stofă albastră ar fi trebuit să se plătească $5 \times 138 = 690$ ruble; aceasta ar fi fost cu $690 - 540 = 150$ ruble mai mult decît s-a plătit în realitate. Diferenţa de 150 de ruble arată că s-a cumpărat și o stofă neagră mai ieftină, cu 3 ruble arșinul. S-a cumpărat atîta

stofă ieftină încît din diferența de 2 ruble pentru fiecare arșin s-ar fi format 150 de ruble; este evident că numărul arșinilor de stofă neagră se va afla împărțind 150 cu 2. Obținem răspunsul 75; scăzînd acești 75 arșini din numărul total de 138 arșini, aflăm cîtă stofă albastră s-a cumpărat: 138 — 75 = 63. Așa trebuia să rezolve problema și Petea.

3. A venit rîndul întrebării a treia: cum a rezolvat problema Udodov senior?

În povestire se spune pe scurt: „Țăcănește cu bilele abacului și obține 75 și 63, ceea ce și trebuia".

Dar în ce constă oare acest calcul la abac? Care este metoda de rezolvare a problemei cu ajutorul abacului?

Soluția este următoarea: problema se rezolvă la abac prin aceeași metodă ca și pe hîrtie, cu ajutorul acelorași operații aritmetice. Dar efectuarea lor se simplifică datorită avantajelor pe care abacele le oferă oricui știe să le manevreze. Este evident că „secretarul de gubernie la pensie" Udodov știa să calculeze bine la abac, pentru că bilele lui, fără ajutorul algebrei, i-au dezvăluit rapid ceea ce meditatorul căuta să afle cu x și y. Să urmărim deci care erau operațiile făcute la abac de tatăl lui Petea.

Înainte de toate el trebuie, după cum știm, să înmulțească 138 cu 5. Pentru aceasta, conform regulelor de efectuare a calculelor la abac, a înmulțit întîi 138 cu 10, adică pur și simplu a trecut numărul 138 cu un rînd mai sus (vezi fig. 14 b), iar apoi a împărțit acest număr în două, tot la abac. Împărțirea se începe de jos: se înjumătățește numărul de bile luate pe fiecare sîrmă: dacă numărul de bile de pe sîrma respectivă este impar, atunci se transformă o bilă de pe această sîrmă în 10 bile de pe sîrma de jos.

În cazul nostru, de exemplu, 1 380 se împarte în două astfel: pe sîrma de jos unde s-au luat 8 bile se îndepărtează 4 bile (4 zeci), pe sîrma de mijloc din trei bile se îndepărtează una, una rămîne, iar a treia se înlocuiește, în gînd, cu zece bile de pe sîrma de jos și se împarte în două, adăugîndu-se 5 (zeci) la bilele de pe sîrma de jos; bila de pe sîrma de sus se transformă în 10 (sute), adăugînd 5 (sute) la bilele de pe sîrma

mijlocie. În rezultat pe sîrma de sus nu mai rămîne nici o bilă, pe sîrma din mijloc
$1 + 5 = 6$ sute, pe cea de jos $4 + 5 = 9$ zeci (fig. 14 c). În total sînt 690 unităţi. Operaţiile se fac repede, automat.

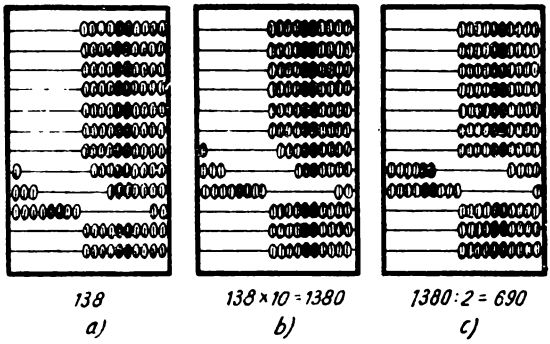


Fig. 14 — El a înmulţit mai întîi 138 cu 10, adică a mutat pe abac numărul 138 cu un rînd mai sus, iar apoi a împărţit numărul cu 2.

Mai departe Udodov senior urma să scadă 540 din 690. Cunoaştem cu toţii cum se face această operaţie la abac.

În sfîrşit, diferenţa obţinută, 150, trebuia împărţită în două: Udodov a îndepărtat din 5 bile (zeci) 2, adăugînd 5 unităţi la rîndul de jos; apoi din bila de pe sîrma sutelor a adunat 5 (zeci) la rîndul de jos: s-au obţinut 7 zeci şi 5 unităţi, adică 75.

Toate aceste operaţii simple se efectuează la abac mult mai repede decît s-a descris aici.

CUM SE SOCOTEA ÎN ANTICHITATE

Oamenii au învăţat să socotească din timpuri foarte vechi. Primul instrument natural pentru socotit au fost degetele mîinilor. Aici îşi are originea sistemul zecimal de numeraţie al multor popoare antice. Trebuie

să spunem că socotirea cu ajutorul degetelor a servit mult timp drept mijloc practic la diverse popoare, printre care și grecii antici. Să nu credeți că cu ajutorul degetelor se poate socoti numai pînă la zece. Din monumentele literaturii antice grecești, ajunse pînă la noi, aflăm că în secolele V și VI înainte de era noastră cal-

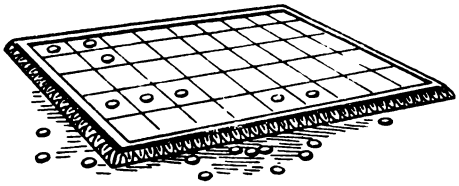


Fig. 15 — Anticii foloseau pentru calcul „abaca".

culul pe degete era foarte răspîndit și putea să depășească o mie.

Mai tîrziu la egipteni, greci, romani, chinezi și la alte cîteva popoare antice apare un dispozitiv pentru socoteli, care prin ideea lui amintește abacul nostru și se cunoștea în antichitate sub denumirea de „abacă". Aspectul lui era diferit la diferite popoare. Astfel, abaca greacă reprezenta o tablă (o masă), împărțită în benzi (fig. 15), pe care se deplasau niște fișe speciale, ce

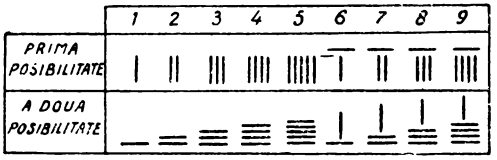


Fig. 16 — Două metode de reprezentare a cifrelor pe tabla de calcul chineză.

aveau același rol ca și bilele de pe abacul nostru. Abaca romană avea forma unei plăci de cupru cu șănțulețe (tăieturi), în care se deplasau niște butoni.

In China antică pentru reprezentarea numerelor pe placa de socoteli se foloseau niște bastonașe cu lungimea

de 10 cm și grosimea de 1 cm. În jurul anului 150 e. n. în China se cunoșteau pe o scară destul de largă chiar metodele de efectuare, cu ajutorul plăcii de socoteli, a celor patru operații aritmetice.

Existau două metode de reprezentare a cifrelor pe placa de socoteli chineză. Ele sînt arătate în tabela din fig. 16.

La scrierea numărului pe placa de socoteli de obicei se proceda în felul următor: prima lui cifră (numărînd din dreapta spre stînga) se reprezenta prin prima metodă, cea de-a doua cifră — prin metoda a doua, cea de a treia se reprezenta din nou prin metoda întîi, iar a patra prin metoda a doua etc. Cu alte cuvinte, toate cifrele numărului aflate pe locuri i m p a r e (numărînd dinspre dreapta) erau reprezentate prin metoda întîi, iar cifrele de pe locurile p a r e — prin metoda a doua. De exemplu, numerele 78 639, 4 576 și 1 287 erau reprezentate pe placa de socoteli așa cum se arată în fig. 17.

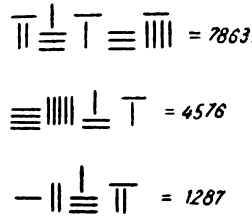
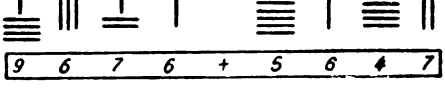


Fig. 17 — Reprezentarea cîtorva numere pe tabla de calcul chineză.

Să vedem pe scurt cum se efectuau adunările și înmulțirile pe o astfel de placă de socoteli.

A d u n a r e a . Se cere de exemplu să se găsească suma a două numere: 9 876 și 5 647. Le reprezentăm întîi pe placa de socoteli:

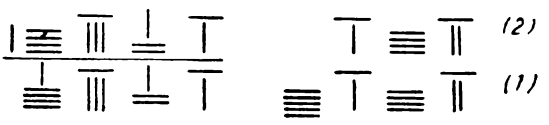


Adunarea se efectua începînd cu unitățile de ordin superior, adică din stînga.

E t a p a l : adunăm miile

$$9 + 5 = 14$$

Reprezentăm aceasta în felul următor:



adică deasupra termenilor adunării formăm un al doilea rînd, scriind în stînga cifrei 9 numărul 14, aşa încît cifra 4 să fie exact deasupra cifrei 9, iar restul primului termen al adunării îl transcriem fără schimbări. Deasupra celui de-al doilea termen al adunării îi repetăm toate cifrele, afară de cifra 5 care a fost deja folosită.

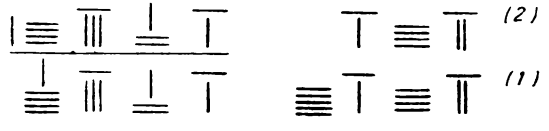
E t a p a 2: adunăm sutele

$$8 + 6 = 14$$

şi pentru că am obţinut la adunare o unitate de ordin superior, o adăugăm la suma dinainte:

$$\begin{array}{r} 14 \\ +\ 14 \\ \hline 154 \end{array}$$

Astfel, rîndul 3 se va scrie (primele două rînduri le repetăm fără nici o schimbare):



In stînga, în rîndul 3 este scris 154, iar apoi s-au repetat ultimele două cifre (76) ale primului termen al adunării; în dreapta sînt repetate ultimele două cifre (47) ale celui de-al doilea termen al adunării (celelalte cifre au fost deja folosite).

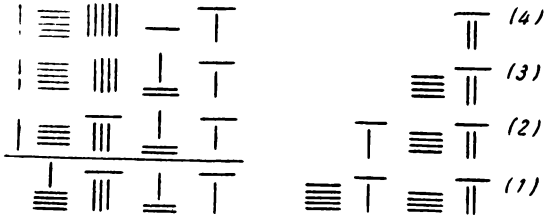
E t a p a 3 : adunăm zecile

$$7 + 4 = 11$$

prin urmare, împreună cu rezultatul precedent obținem:

$$\begin{array}{r} 154 \\ +\ \ 11 \\ \hline 1551 \end{array}$$

Acest număr 1 551 îl reprezentăm în stînga, în rîndul 4;



E t a p a 4: a rămas să adunăm unitățile

$$6 + 7 = 13$$

și suma celor două numere date va fi găsită; ea este egală cu 15 523:

$$\begin{array}{r} 1551 \\ +\ \ 13 \\ \hline 15523 \end{array}$$

Numărul obținut, 15 523, se scrie în rîndul al cincilea din coloana stîngă și schema adunării are, definitiv, înfățișarea din fig. 18.

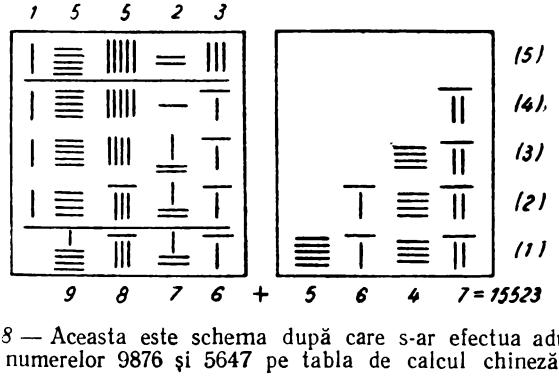


Fig. 18 — Aceasta este schema după care s-ar efectua adunarea numerelor 9876 și 5647 pe tabla de calcul chineză.

Înmulțirea. In China antică înmulțirea se făcea cu ajutorul plăcii de socoteli, începînd cu cifrele care reprezintă unități de ordin superior, și trecînd treptat la cele de ordin inferior. În secolul I al erei noastre se folosea deja tabla înmulțirii.

Să presupunem că trebuie să înmulțim 346 cu 27. În notațiile noastre procesul înmulțirii cu placa de socoteli ar fi arătat aproximativ astfel:

$$\begin{array}{r} \times\ 346 \\ \underline{\quad 27} \\ 6 \\ 21 \\ 8 \\ 28 \\ 12 \\ \underline{42} \\ 9342 \end{array}$$

Noi am înmulțit întîi 3 cu 2 și am obținut 6 — cifra unităților de ordin superior al produsului (miile). După aceea am înmulțit 3 cu 7, iar 4 cu 2; numerele obținute pentru sute, 21 și 8, le-am scris sub cifra 6 ținînd seama de ordinul lor, arătat mai sus. Apoi am înmulțit 4 cu 7, iar 6 cu 2 (aceasta ne-a dat numărul zecilor 28 și 12) și, în sfîrșit, am înmulțit 6 cu 7 (am obținut 42 de unități). Toate aceste numere le-am scris după cum s-a arătat mai sus și am adunat. Ca rezultat am obținut produsul 9 342.

Placa de socoteli și metodele de efectuare a calculelor cu ajutorul ei (despre metodele adunării și înmulțirii am mai vorbit) s-au păstrat în China pînă în secolul XIII. În acea vreme au început să folosească zeroul, care cu ajutorul bastonașelor de calcul se reprezenta sub forma unui pătrat □.

În secolul al XIII-lea pe placa de socoteli se reprezentau și fracțiile zecimale. De exemplu numărul 106 368,6312 era reprezentat aproximativ așa cum se arată în fig. 19.

În secolul al XV-lea în China și în Japonia, pentru efectuarea celor patru operații aritmetice, se folosea de-

ja abacul cu şapte bile (în China se numea „suan-pan“[1], iar în Japonia — „soroban“, vezi fig. 20). Aceste dispozitive de calcul originale s-au păstrat pînă în zilele noastre şi se bucură de o mare popularitate.

Iată, de exemplu, ce spunea cîndva despre soroban un savant japonez: „cu toată vechimea lui sorobanul depăşeşte toate dispozitivele

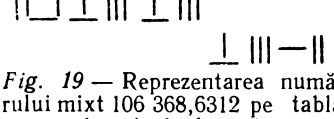


Fig. 19 — Reprezentarea numărului mixt 106 368,6312 pe tabla de calcul chineză.

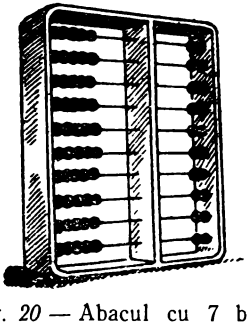


Fig. 20 — Abacul cu 7 bile folosit în China şi Japonia.

de calcul modern prin uşurinţa de manevrare, simplitatea construcţiei şi preţul redus“.

ABACUL RUS (SCIOTÎ).

Există multe obiecte utile pe care nu le apreciem suficient numai pentru că, găsindu-le mereu la îndemînă, ele au devenit prea banale. Printre aceste obiecte insuficient apreciate se numără şi abacul de contabilitate — dispozitiv de calcul popular rus, care reprezintă o variantă a renumitei „abace“ sau „placă de socoteli“ a înaintaşilor.

Occidentul nu cunoaşte aproape de loc abacele. Ele se folosesc numai în şcolile elementare ca material demonstrativ în predarea numeraţiei.

Abacul de contabilitate, cu toată simplitatea construcţiei, prin rezultatele ce le dă poate concura, în unele privinţe, chiar şi maşinile de calcul. În mîini pricepute acest dispozitiv simplu face adevărate minuni. Un specialist care înainte de revoluţie a lucrat

[1] Abacul suan-pan prezintă dimensiuni diferite, unele dintre cele mai mici (17 mm lungime şi 8 mm lăţime). Se folosesc abace şi cu 6 bile: 5 bile de o parte a despărţiturii, una de cealaltă parte. (Pe modelul pe care-l posed sînt 21 de şiruri de bile.)

într-o mare firmă rusească la vînzarea mașinilor de calcul povestea că de multe ori a uimit cu abacul rus pe străinii care aduceau mostre de mecanisme de calcul complicate. El organiza întreceri între doi calculatori, dintre care unul lucra cu o mașină străină „de adiție" scumpă (adică mașină de adunat), iar celălalt se folosea de abacul rus. Și nu o dată se întîmpla că acesta din urmă — ce e drept un mare maestru — cîștiga în concursul cu posesorul minunii străine în ce privește rapiditatea și exactitatea calculelor. Se întîmpla uneori că străinul uimit de rapiditatea calculului la abac, se recunoștea imediat învins, își așeza mașina în geamantan, nemaisperînd să vîndă în Rusia nici un exemplar.

Ce este drept, la abacul rus nu se pot efectua toate operațiile care se fac cu ajutorul mașinilor. Însă în multe privințe — de exemplu la adunare și scădere — el poate rivaliza cu aparatele cele mai complexe. De altfel, în mîini dibace înmulțirea și împărțirea sînt de asemenea efectuate cu rapiditate la abac, dacă se cunosc metodele de efectuare a acestor operații.

Să facem cunoștință cu cîteva din ele.

ÎNMULȚIREA LA ABAC

Iată cîteva metode care vor permite oricărei persoane care știe să adune la abac să efectueze în mod rapid înmulțirile ce se ivesc în practică.

Înmulțirea cu 2 și 3 este înlocuită cu adunarea dublă și triplă.

La înmulțirea cu 4 se înmulțește întîi cu 2 și apoi se adună rezultatul cu el însuși.

Înmulțirea unui număr cu 5 se efectuează la abac astfel: se mută întregul număr cu o sîrmă mai sus, adică se înmulțește cu 10, iar apoi se împarte numărul astfel obținut în două (împărțirea cu doi la abac am explicat-o la pag. 44).

În locul înmulțirii cu 6 se înmulțește cu 5 și se adaugă deînmulțitul. Pentru înmulțirea cu 7 se înmulțește cu 10 și se scade deînmulțitul de 3 ori.

Înmulțirea cu 8 se înlocuiește prin înmulțirea cu 10—2.

În același fel se face înmulțirea cu 9: se înlocuiește cu înmulțirea cu 10—1.

La înmulțirea cu 10 întregul număr se mută, după cum am mai spus, cu un rînd mai sus.

Probabil că cititorul și-a dat deja seama cum trebuie să procedeze în cazul înmulțirii cu numere mai mari ca 10 și ce fel de înlocuiri sînt mai potrivite. Înmulțitorul 11 va trebui, desigur, înlocuit cu 10 + 1.

Înmulțitorul 12 se înlocuiește cu 10 + 2, sau practic cu 2 + 10; adică întîi se dublează numărul, iar apoi i se adaugă numărul înmulțit cu 10. Înmulțitorul 13 se înlocuiește cu 10 + 3 etc.

Să examinăm cîteva cazuri particulare de înmulțitori care nu depășesc o sută:

20=10×2	32=22+10
22=11×2	42=22+20
25=(100:2):2	43=33+10
26=25+1	45=50—5
27=30—3	63=33+30 etc.

De altfel, se vede ușor că la abac este foarte comod să se facă înmulțirea cu numere ca: 22, 33, 44, 55 etc.; de aceea trebuie să căutăm ca la descompunerea înmulțitorului să ne folosim de astfel de numere formate prin repetarea unei cifre.

La aceleași procedee se recurge și la înmulțirea cu numere mai mari decît o sută. Dacă asemenea metode artificiale sînt obositoare, putem, desigur, să facem înmulțirea la abac după regula generală, înmulțind cu fiecare cifră a înmulțitorului și scriind produsele parțiale — chiar și această metodă scurtează întrucîtva timpul necesar efectuării operației.

ÎMPĂRȚIREA LA ABAC

Efectuarea împărțirii la un abac de contabilitate este mult mai grea decît înmulțirea; pentru aceasta trebuie să se memoreze o serie întreagă de metode speciale,

uneori destul de complicate. Cei pe care-i interesează asemenea metode pot apela la manuale speciale. Aici vom prezenta doar cele mai comode metode de împărţire la abac, cu numere care nu-l depăşesc pe zece (cu excepţia numărului 7 cu care împărţirea se face mult mai greu).

Ştim deja cum se face împărţirea cu doi (pag. 44), această metodă este foarte simplă.

Mult mai complicată este metoda de împărţire cu 3: ea constă în înlocuirea împărţirii prin înmulţirea cu fracţia periodică infinită 0,333... $\left(\text{se ştie că } 0{,}33\ldots = \frac{1}{3}\right)$. Ne este cunoscut deja procedeul înmulţirii la abac cu 3; este uşoară de asemenea împărţirea cu 10: trebuie doar să mutăm deîmpărţitul cu un rînd mai jos. După cîteva exerciţii această metodă de împărţire cu 3, care la prima vedere apare cam complicată, practic este destul de comodă.

Împărţirea cu 4 este înlocuită, desigur, prin împărţirea dublă cu 2.

Şi mai simplă este împărţirea cu 5: ea se substituie prin împărţirea la 10 şi dublarea rezultatului.

Împărţirea cu 6 se face în două etape: întîi la 2, iar apoi rezultatul se împarte la 3.

Împărţirea cu 7, după cum am mai arătat, nu o vom expune aici.

Împărţirea cu 8 se face în trei etape: întîi cu 2, rezultatul iar cu 2 şi apoi încă o dată cu 2.

Este interesantă metoda împărţirii cu 9. Ea se bazează pe faptul că $\frac{1}{9} = 0{,}1111\ldots$ Evident, în locul împărţirii cu 9 se pot aduna succesiv 0,1 din deîmpărţit + 0,01 din acelaşi număr[1] şi aşa mai departe.

După cum vedem, cea mai simplă este împărţirea cu 2, 10 şi 5 şi, desigur, cu multiplii lor pari: 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Aceste cazuri de împărţire nu prezintă greutăţi nici chiar pentru un manipulator mai puţin experimentat.

---

[1] Acest procedeu este util şi pentru împărţirea în minte cu 9

De strămoșii îndepărtați ai abacei noastre de contabilitate sînt legate unele rămășițe ale vremurilor vechi în limbă și obiceiuri. Puțini își dau seama, de exemplu, că făcînd uneori nod la batistă ca să nu uităm ceva, imităm un gest cu mult substrat al strămoșilor noștri —

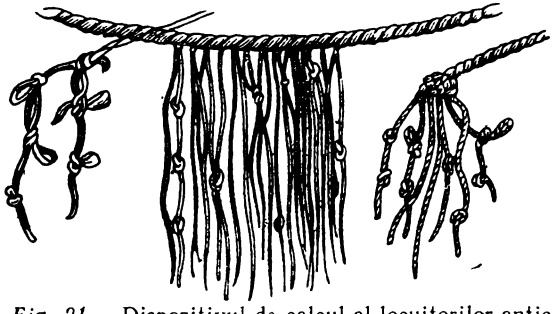


Fig. 21 — Dispozitivul de calcul al locuitorilor antici din Peru — „cvipos".

în felul acesta notau ei rezultatul unei socoteli efectuate cu ajutorul șireturilor. Un număr oarecare de curele sau de frînghii cu noduri reprezentau cîndva un aparat de socotit (fig. 21), analog în principiu cu abacul. Aceasta era „abaca de frînghie" peruviană, așa-numitul „cvipos". Un nod simplu pe frînghie însemna 10, unul dublu 100, triplu — 1000 etc.

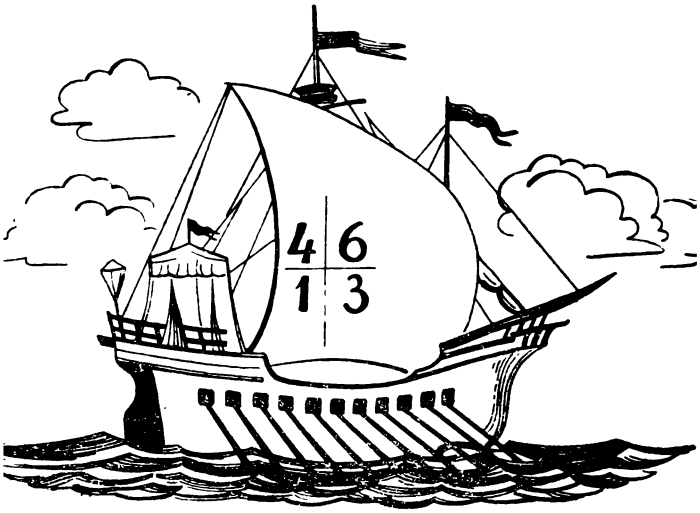
Tot de abac sînt legate și cuvintele, atît de răspîndite astăzi, „bancă" și „cec". În limba germană „bank" înseamnă bancă (de grădină). Ce poate exista comun între o instituție financiară — bancă în sensul actual al cuvîntului, și o bancă de grădină ? S-a constatat că aceasta nu este doar o simplă coincidență a denumirilor. Abacul în formă de bancă a fost folosit pe scară largă în cercurile comerciale ale Germaniei. În secolele XV—XVI, fiecare birou de schimb sau oficiu bancar se caracteriza, în primul rînd, prin existența unei „bănci de calcul"; deci apare natural faptul că banca ca instituție financiară și banca de grădină au devenit sinonime.

Contingenţă mai puţin directă cu abacul are cuvîntul „cec". Acest cuvînt este de origine engleză şi derivă de la verbul „checker" — a linia. În secolele XVI—XVII „checkered" se numea un şervețel de piele, liniat în formă de abac; el era purtat de comercianţii englezi şi în caz de necesitate desfăcut pe masă pentru efectuarea calculelor. Formularele pentru calcule se liniau după modelul acestor abace, şi nu este de mirare că asupra lor a trecut, în formă prescurtată, însăşi denumirea acestor dispozitive de calcul: de la cuvîntul „checkered" s-a format cuvîntul „ceck".

Este interesantă providenţa expresiei „a rămîne pe bobi", pe care o folosim astăzi vorbind despre un om care şi-a pierdut toţi banii. Ea îşi are originea de asemenea în vremurile cînd toate calculele băneşti se efectuau cu ajutorul abacei, a mesei de numărătoare sau a băncii cu ajutorul b o b i l o r , care înlocuiau bilele de pe abac. „Unul numără cu ajutorul pietricelelor, iar altul — cu al bobilor", — citim în cartea lui Campanella „Cetatea Soarelui" (1602). Omul ce îşi pierdea banii rămînea numai cu bobii, care exprimau suma pierderii lui, — de aici şi expresia respectivă.

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 12+3-4+5+67+8+9 \\ 12-3-4+5-6+7+89 \\ 123+4-5+67-89 \end{cases}$$



CAPITOLUL III

PUȚINĂ ISTORIE

„ÎMPĂRȚIREA-I TREABĂ GREA"

Puțini își dau seama că metodele de astăzi folosite pentru efectuarea operațiilor aritmetice n-au fost totdeauna chiar atît de simple și comode, și nu au dus direct și rapid la rezultatul căutat.

Strămoșii noștri foloseau metode mult mai greoaie și mai încete. Dacă un elev din sec. al XX-lea ar putea să se transporte cu patru sau chiar numai cu trei secole înapoi, el i-ar uimi pe înaintași prin rapiditatea și corectitudinea calculelor sale aritmetice. I s-ar fi dus vestea prin școlile și mînăstirile învecinate, întunecînd gloria

celor mai abili calculatori din acea epocă, şi din toate colţurile ar fi venit oameni pentru a învăţa metodele de calcul ale marelui maestru nou apărut.

În vechime erau deosebit de complicate şi grele operaţiile de înmulţire şi mai ales cele de împărţire. „Înmulţirea e chinul meu, iar cu împărţirea e curată nenorocire", — se spunea în vechime. Pe atunci nu existau încă metode unice elaborate şi confirmate de practică pentru fiecare operaţie. Dimpotrivă, erau în vigoare, simultan, aproape o duzină de metode diferite de înmulţire şi împărţire, metode foarte încurcate, pe care nu reuşea să le memoreze un om cu aptitudini mediocre. Fiecare profesor care învăţa pe alţii să socotească îşi apăra metoda favorită, fiecare „magistru al împărţirii" (existau astfel de specialişti) lăuda o metodă proprie de efectuare a acestei operaţii.

În cartea lui V. V. Belliustin „Cum au ajuns oamenii pînă la aritmetica actuală" (1914) sînt expuse 27 de metode de înmulţire. Autorul menţionează: „Este foarte posibil că mai există şi altele (metode), păstrate în ascunzătorile depozitelor de cărţi, risipite în lucrări numeroase, mai ales în manuscrise". Şi toate aceste metode — „în şah", „prin îndoire", „pe părţi sau rupt", „în cruciuliţe", „în reţea", „cu spatele în faţă", „în romb", „în triunghi", „în cupe", „în diamant" etc.[1], precum şi toate metodele de împărţire, care purtau şi ele denumiri destul de curioase, se întreceau în ce priveşte complexitatea şi greutatea folosirii. Ele se învăţau cu mare greutate şi numai după o practică îndelungată. Pentru însuşirea unei înmulţiri şi împărţiri rapide şi corecte a numerelor formate din mai multe cifre se considera necesar un talent înnăscut, aptitudini deosebite; se credea că oamenii de rînd nu pot să-şi însuşească această înţelepciune. „Împărţirea-i treabă grea" (dura cosa e la partita) — spunea o veche zicală italiană; ea era într-adevăr o treabă grea dacă se luau în consideraţie metodele obositoare, folosite pe atunci pentru efectuarea a-

[1] Exemplele de înmulţire enumerate mai sus sînt indicate în vechea „aritmetică" a lui Niccolo Tartaglia. Metoda actuală de înmulţire este descrisă acolo sub denumirea de metodă „în şah".

cestor operaţii. Unele metode purtau cîteodată denumiri destul de jucăuşe, sub o denumire hazlie se ascundeau un şir de operaţii lungi şi încurcate. În sec. XVI, cea mai scurtă şi cea mai comodă era împărţirea „în barcă sau galeră". Renumitul matematician italian din acele

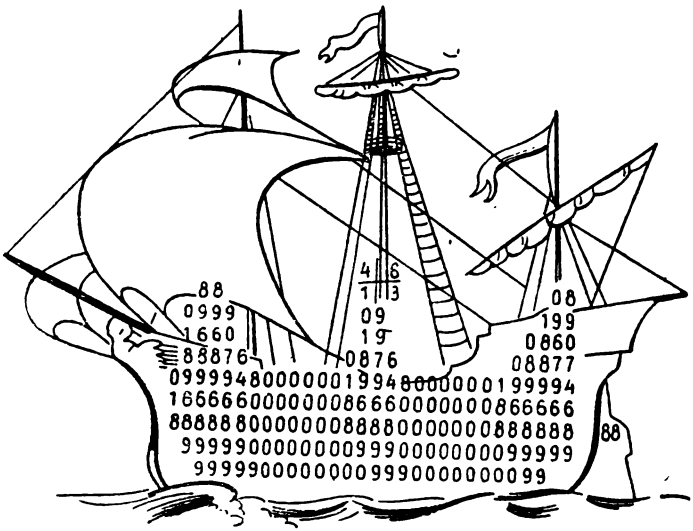


Fig. 22 — Împărţirea numerelor după vechea metodă a „galerei". „Figura formează din numere o galeră cu proră şi pupă, catarg, vele şi lopeţi", — scria matematicianul Tartaglia în sec. XVI.

timpuri, Niccolo Tartaglia, scria în cuprinzătorul său manual de aritmetică următoarele:

„Cea de-a doua metodă a împărţirii se numeşte la Veneţia[1] b a r c ă sau g a l e r ă, datorită unei oarecare asemănări a figurii obţinute (fig. 22), la îm-

[1] În sec. XIV—XVI Veneţia şi cîteva alte state din Italia făceau comerţ maritim pe scară largă; în aceste ţări metodele de calcul au fost elaborate în scopuri comerciale, mai înainte decît în altele. Cele mai bune lucrări de aritmetică au apărut în Veneţia. Mulţi termeni italieni din aritmetica comercială s-au păstrat pînă în prezent. Vechiul manual de matematică rusesc cuprinde toate capitolele matematicii cunoscute în acea epocă (inclusiv cunoştinţe de astronomie maritimă). El reprezintă una din

părțirea unor numere — cu o barcă, iar a altora — cu galera; uneori se obține o galeră utilată cu toate cele necesare, ea este formată din numere așezate astfel încît se disting pupa și prova, catargul, pînzele, și vîslele".

Fig. 23 — Vinieta din „Aritmetica" lui Magnițki (ed. 1703). În figură este reprezentat „Templul Înțelepciunii". Înțelepciunea stă pe tron, iar pe trepte sînt indicate operațiile aritmetice. Pe coloane sînt înscrise denumirile ființelor în care își găsește aritmetica aplicarea: geometria, stereometria, astronomia, optica (cunoștințe asimilate prin „străduință"), mercatoria (adică cartografia), geografia, fortificația, arhitectura (cunoștințe obținute prin „învățătură").

Este interesant să recunoști acest lucru: imediat îți imaginezi că plutești pe o mare de cifre cu galera artimetică cu pînze. Și, deși acest matematician reco-

---

cele două cărți pe care Lomonosov le-a denumit „porțile științei sale". Titlul ei amănunțit este următorul:

„Aritmetica, adică știința numerelor, la porunca țarului Petru Alexeevici în marele oraș Moscova, pentru uzul tinerilor ruși iubitori de înțelepciune și al celorlalți oameni de orice rang și vîrstă, a fost tipărită în anul 1703 de la nașterea cuvîntului lui D-zeu".

mandă metoda respectivă ca „cea mai elegantă, cea mai ușoară, cea mai sigură, cea mai uzuală și cea mai generală din cele existente, utilă pentru împărțirea tuturor numerelor", eu nu mă încumet s-o expun aici, temîndu-mă că însăși cel mai răbdător dintre dumneavoastră va închide cartea, refuzînd să citească mai departe. Cu toate acestea, deși o metodă obositoare, era cea mai bună din acea epocă. În Rusia ea a fost folosită pînă la mijlocul secolului al XVIII-lea în „Aritmetica" lui Leontie Magnițki, fiind descrisă printre cele șase metode propuse acolo (din care nici una nu se aseamănă cu cea actuală) și recomandată în mod special de autor; pe parcursul întregii sale cărți voluminoase — 640 de pagini de format mare — Magnițki utilizează exclusiv „metoda galerei", fără a folosi însă această denumire.

În continuare vom prezenta cititorului această „galeră" numerică, folosind un exemplu din cartea lui Tartaglia, pomenită mai sus:

	4 | 6	
88	1 | 3	08
0999	09	199
1660	19	0860
88876	0876	08877

0999948000000199480000000199994
1666660000000866600000000866666
deîmpărțitul—888888000000088880000000888888
(88–cîtul)
împărțitorul[1] — 999990000000099900000000099999
999990000000099900000000099

Ajungînd aici după un calcul atît de greu, strămoșii noștri considerau ca absolut necesară verificarea acestui rezultat obținut cu sudoarea frunții. Desigur, asemenea metode greoaie trezeau neîncrederea față de rezultatele lor. Pe o cale lungă și întortocheată este mai ușor să te rătăcești, decît pe calea dreaptă a metodelor contemporane. Iată cum a apărut vechiul obicei de a

[1] Ultimii doi de 9 au fost adăugați la împărțitor în procesul împărțirii.

v e r i f i c a fiecare operaţie aritmetică efectuată— o regulă bună pe care ar trebui s-o respectăm şi noi.

Metoda de verificare preferată era aşa-numita „metodă a lui nouă". Dat fiind eleganţa ei este descrisă adesea şi în unele manuale contemporane de aritmetică.

Verificarea cu nouă se bazează pe „regula restului" care spune: restul de la împărţirea unei sume cu un număr oarecare este egal cu suma resturilor de la împărţirea fiecărui termen cu acelaşi număr. Tot astfel, restul produsului este egal cu produsul dintre resturile factorilor. Pe de altă parte se ştie[1] că la împărţirea cu nouă a numărului se obţine acelaşi rest ca şi la împărţirea sumei cifrelor acestui număr cu nouă; de exemplu, dacă împărţim 758 la 9 obţinem rest 2 şi acelaşi lucru se întîmplă dacă împărţim 7 + 5 + 8 la 9. Comparînd ambele proprietăţi arătate mai sus, ajungem la metoda de verificare cu 9, adică prin împărţirea cu 9. Pentru a arăta în ce constă această metodă e suficient un singur exemplu.

Se cere să se verifice rezultatul a d u n ă r i i din următoarea coloană:

38932 ...	7
1096 ...	7
+ 4710043 ...	1
589106 ...	2
5339177 ...	8

Adunăm în minte cifrele fiecărui termen al adunării şi dacă obţinem numere din două cifre le adunăm din nou (lucrul acesta se face în însuşi procesul adunării numerelor) pînă cînd obţinem un număr format dintr-o singură cifră. Aceste rezultate (resturi de la împărţirea cu 9) le scriem, aşa cum s-a arătat în exemplu, alături de termenul respectiv al adunării. Adunînd toate resturile (7+7+1+2=17; 1+7=8) obţinem 8. Tot 8 trebuie să fie suma cifrelor rezultatului (5 339 177), dacă operaţia a fost corect efectuată; într-adevăr: 5+3+3+ +9+1+7+7=35, iar 3+5=8.

[1] Se clarifică la deducerea regulii de divizibilitate prin 9.

Verificarea s c ă d e r i i se efectuează la fel, dacă se consideră descăzutul drept sumă, iar scăzătorul și diferența drept termeni ai adunării. De exemplu:

$$\begin{array}{r} 6913 \ldots \\ -\ 2587 \ldots \\ \hline 4326 \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

$4 + 6 = 10;$ $\qquad 1 + 0 = 1$

Această metodă este deosebit de comodă pentru verificarea înmulțirii după cum se vede din următorul exemplu:

$$\begin{array}{r} 8713 \ldots \\ \times\ 264 \ldots \\ \hline 34852 \\ 52278 \\ 17426 \\ \hline 2300232 \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \times\ 3 \\ \hline 3 \\ \\ \\ \\ 3 \end{array}$$

Dacă la o astfel de verificare a înmulțirii se va descoperi că rezultatul e greșit, pentru a determina unde anume se ascunde greșeala se poate verifica prin metoda lui nouă fiecare produs parțial în parte; iar dacă aici totul este corect, atunci rămîne să se verifice a d u n a r e a produselor parțiale.

Cum putem verifica prin această metodă împărțirea? Dacă avem un caz de împărțire exactă, atunci deîmpărțitul este produsul dintre împărțitor și cît. Cînd însă împărțirea este cu rest, ne folosim de faptul că deîmpărțitul = împărțitorul $\times$cîtul + restul.

De exemplu:

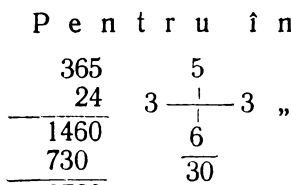
$$\underbrace{16201387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8}; \text{ rest } \underbrace{192}_{3}$$

suma cifrelor:

$2\times8+3=19$ $\qquad 1+9=10;$ $\qquad 1+0=1$

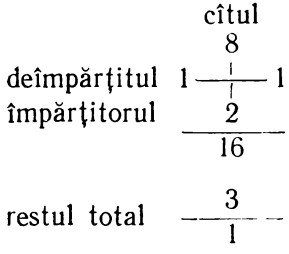
Redăm din „Aritmetica“ lui Magnițki o așezare comodă propusă pentru verificarea cu 9:

P e n t r u î n m u l ț i r e:



„Este conform, deci este bine“.

P e n t r u î m p ă r ț i r e:



„Este conform, împărțirea este bună“.

Este neîndoielnic faptul că o asemenea verificare a operațiilor este ideală în ce privește rapiditatea și comoditatea în calcul. Nu se poate spune același lucru și despre siguranță: greșeala poate totuși să se strecoare. Într-adevăr, o aceeași sumă a cifrelor o pot avea numere diferite; nu numai inversarea cifrelor, dar uneori chiar și înlocuirea unor cifre cu altele rămîne nedescoperită la verificare. Nedescoperite vor fi și nouăle, precum și zerourile de prisos, pentru că ele nu influențează suma cifrelor. De aceea ar fi fost greșit să ne bazăm întrutotul pe un asemenea mod de verificare. Strămoșii noștri își dădeau seama de acest lucru și nu se limitau numai la verificarea prin metoda lui nouă; ei efectuau o verificare suplimentară, de cele mai multe ori cu ajutorul lui ș a p t e. Această metodă se bazează pe aceeași „regulă a resturilor“, dar nu este atît de comodă ca metoda lui nouă, pentru că împărțirea cu șapte trebuie efectuată complet pentru a găsi resturile (și în această situație sînt posibile greșeli chiar în cursul verificării).

Cele două verificări — cu nouă şi cu şapte — dau posibilitatea unui control mai sigur: ceea ce scapă unuia va fi descoperit în cursul celuilalt. Greşeala nu va fi descoperită numai în cazul cînd diferenţa dintre rezultatul real şi cel obţinut este multiplul numărului $7 \times 9 = 63$. Cum această întîmplare este totuşi posibilă, nici verificarea dublă nu dă siguranţă deplină că rezultatul este corect.

De altfel, pentru calculele obişnuite, unde greşeala nu poate fi mai mare decît una sau două unităţi, ne putem limita numai la verificarea cu 9. Verificarea suplimentară cu 7 este prea greoaie, şi nu ne poate asigura un control bun.

Dacă, cu toate acestea, efectuînd un calcul de mare importanţă, veţi dori să faceţi pentru siguranţă o verificare dublă, atunci în locul împărţitorului 7 este mai bine să folosiţi împărţitorul 11. Această verificare poate fi mult simplificată dacă se utilizează următoarea regulă de divizibilitate prin 11: numărul dat se împarte de la dreapta spre stînga în grupuri, cîte două cifre în fiecare grup (grupul din extrema stîngă poate să cuprindă o singură cifră); grupurile se adună şi suma obţinută va avea, la împărţirea cu 11, acelaşi rest ca şi numărul dat.

Vom explica cele afirmate cu ajutorul unui exemplu.

Se cere să se găsească restul de la împărţirea numărului 24 716 cu 11.

Împărţim numărul în grupuri şi le adunăm:

$$2+47+16=65$$

Deoarece 65 împărţit cu 11 dă rest 10, şi numărul 24 716, la împărţirea lui cu 11 trebuie să dea acelaşi rest, ceea ce se întîmplă într-adevăr[1].

Propun această metodă pentru că ea dă simultan numărul care la împărţirea cu 9 are acelaşi rest ca şi numărul dat. Astfel noi avem posibilitatea de a efectua verificarea concomitent cu ajutorul a doi divizori: 9 şi 11. Acestei verificări poate să-i scape numai o greşeală multiplă de 99, adică o greşeală foarte puţin probabilă.

[1] Motivarea acestei metode este dată în cartea „Matematica vie" de I. Perelman.

Metodele de înmulțire vechi erau greoaie și incomode; se pune însă întrebarea: metoda pe care o folosim astăzi este chiar atît de bună încît nu i se mai pot aduce nici un fel de îmbunătățiri. Nu, nici metoda noastră nu este perfectă; pot fi găsite metode de calcul mai rapide și mai sigure. Din cîteva îmbunătățiri ce pot fi propuse vom arăta deocamdată numai una, care nu accelerează efectuarea operației, ci îmbunătățește siguranța ei. Ea constă în aceea că, atunci cînd avem un înmulțitor cu mai multe cifre, înmulțirea nu începe cu ultima cifră a înmulțitorului, ci cu p r i m a c i f r ă. Înmulțirea efectuată la pag. 63 va deveni:

$$\begin{array}{r} \times\ 8713 \\ \quad\ 264 \\ \hline 17426 \\ 52278 \\ \quad 34852 \\ \hline 2300232 \end{array}$$

După cum vedem, ultima cifră a fiecărui produs parțial se scrie sub cifra înmulțitorului cu care se face înmulțirea.

Avantajul unei asemenea așezări constă în aceea că cifrele produselor parțiale, de care depind primele, cele mai de răspundere cifre ale rezultatului, se obțin la începutul operației cînd atenția nu este încă obosită și, prin urmare, probabilitatea de a face o greșeală este mai mică (afară de aceasta, metoda simplifică folosirea așa-numitei înmulțiri „prescurtate", despre care nu vom vorbi aici).

METODA DE ÎNMULȚIRE „RUSĂ"

Nu puteți efectua înmulțirea unor numere formate din mai multe cifre — chiar nici din două cifre, — dacă nu țineți minte toate rezultatele obținute prin înmul-

ţirea numerelor de o cifră, adică ceea ce se numeşte tabla înmulţirii. În „Aritmetica" lui Magniţki, despre care am mai vorbit, necesitatea cunoaşterii tablei înmulţirii este cîntată în versuri — atît de stranii pentru urechea contemporanului — ca:

Acel ce nu reţine
tabelele-nmulţirii,
aceluia, vezi bine,
că nu-i va fi uşor
să se descurce-n ştiinţă
fără ajutorul lor.
Cu sîrguinţă-nvaţă,
că n-o să-ţi prindă
rău tabelele de faţă.

Autorul acestor versuri probabil nu ştia sau a scăpat din vedere faptul că există o metodă de a înmulţi numerele şi fără cunoaşterea tablei înmulţirii. Metoda, care nu aduce cu metodele şcolare de astăzi, se folosea în calculele vechi ruseşti şi a fost moştenită din timpurile cele mai îndepărtate. Esenţa constă în aceea că înmulţirea oricăror două numere se reduce la un şir de împărţiri succesive ale unuia din numere cu doi şi dublarea simultană a celuilalt număr. Iată, de pildă:

$$\begin{aligned} 32 \times 13 \\ 16 \times 26 \\ 8 \times 52 \\ 4 \times 104 \\ 2 \times 208 \\ 1 \times 416 \end{aligned}$$

Înjumătăţirea continuă pînă cînd se obţine la cît 1, dublîndu-se totodată cel de-al doilea număr. Ultimul număr dublat reprezintă tocmai rezultatul căutat.

Nu este greu de înţeles pe ce se bazează această metodă. Produsul nu se schimbă dacă un factor se împarte cu 2, iar celălalt se înmulţeşte cu 2. De aceea este clar că în rezultatul unei repetări multiple a acestei operaţii se va obţine produsul căutat:

$$32 \times 13 = 1 \times 416$$

Cum trebuie să procedăm cînd avem de-a face cu un număr impar?

Metoda populară învinge uşor această greutate. Regula spune că în cazul numărului impar trebuie să i se scadă o unitate şi restul să se împartă cu doi; în schimb, la ultimul număr din coloana dreaptă va trebui să se a d a u g e toate acele numere din coloană care stau în dreptul numerelor i m p a r e din coloana stîngă; suma va fi tocmai produsul căutat. Practic aceasta se face astfel: toate rîndurile cu numere pare, din coloana stîngă, se şterg; rămîn numai acelea care conţin în stînga un număr impar. Dăm următorul exemplu (steluţele indică că rîndul respectiv trebuie şters):

$$19\times17$$
$$9\times34$$
$$4\times68^{*}$$
$$2\times136^{*}$$
$$1\times272$$

Adunînd numerele care nu au fost şterse, obţinem rezultatul perfect corect: $17+34+272=323$

Pe ce se bazează această metodă?

Justeţea metodei devine clară dacă vom ţine seama că:

$$19\times17=(18+1)\times17=18\times17+17$$
$$9\times34=(8+1)\times34=8\times34+34 \text{ etc.}$$

Se înţelege că numerele 17, 34 etc., pierdute în timpul împărţirii în două a numărului impar, trebuie adăugate la rezultatul ultimei înmulţiri pentru a obţine produsul respectiv.

DIN ŢARA PIRAMIDELOR

Este foarte probabil că metoda descrisă mai sus ne-a venit dintr-o ţară îndepărtată a antichităţii — Egipt. Noi ştim foarte puţin despre modul de a efectua operaţiile aritmetice în ţara piramidelor. S-a păstrat însă

un document interesant — un papirus în care au fost scrise exercițiile aritmetice ale unui elev din școala de hotarnici din Egiptul antic; acesta este așa-numitul „papirus al lui Rhind", ce datează din perioada dintre anii 2 000 și 1 700 î.e.n.[1] și care este o copie a unui manuscris și mai vechi, scris de un oarecare Ahmes. Scribul[2] Ahmes, găsind „caietul de școlar" al unui elev din această epocă îndepărtată, a reprodus cu grijă toate exercițiile aritmetice ale viitorului hotarnic — împreună cu greșelile și corecturile profesorului — și a dat copiei sale un titlu fastuos, care a ajuns pînă la noi în următoarea formă incompletă:

„Indicație cum pot fi obținute cunoștințe asupra tuturor lucrurilor întunecate... tuturor tainelor ascunse în lucruri.

Întocmit în timpul regelui Egiptului de Sus și de Jos Ra-a-use, care dă viață, după modelul vechilor opere de pe timpul regelui Ra-en-mat de către scribul Ahmes".

Papirusul lui Rhind se termină cu sfaturi foarte originale: „Prinde șerpii, șoarecii; smulge buruienele la timp; capătă țesături din belșug. Cere-i zeului Ra căldură, vînt și apă multă".

Unul din papirusurile matematice egiptene este păstrat la Moscova, la Muzeul de arte „A.S. Pușkin". Descifrarea acestui papirus a fost începută de academicianul B.A. Turaev în anul 1914 și terminată de academicianul V.V. Struve în anul 1927.

În papirusul lui Rhind — acest document interesant care are aproape 40 de veacuri și este o mărturie a unei antichități și mai îndepărtate — găsim patru

[1] Papirusul a fost găsit de egiptologul englez Henri Rhind. Desfășurat, are o lungime de 20 m și lățimea de 30 cm. E păstrat la Muzeul britanic din Londra.

[2] Scribii făceau parte din clasa a III-a a preoților egipteni; în competența lor intra „tot ce era legat de construcția și proprietatea imobilă a templului. Preocuparea lor principală o formau științele matematice, astronomice și geografice (V. Bobînin).

exemple de înmulțire, efectuate după o metodă care amintește foarte mult de metoda rusă populară. Iată aceste exemple (punctele din fața numerelor indică numărul unităților înmulțitorului; cu semnul + s-au notat numerele care urmează să fie adunate):

(8×8)	(9×9)
.8	.9 +
..16	..18
....32	36
::::64	::::72+
	Total.....81

(8×365)	(7×2801)
.365	.2801 +
..730	..5602 +
....1460	....11204 +
::::2920	Total...19607

Se vede că încă cu cîteva milenii înaintea noastră egiptenii au folosit o metodă de înmulțire foarte asemănătoare cu metoda rusă populară (fig. 24); această me-

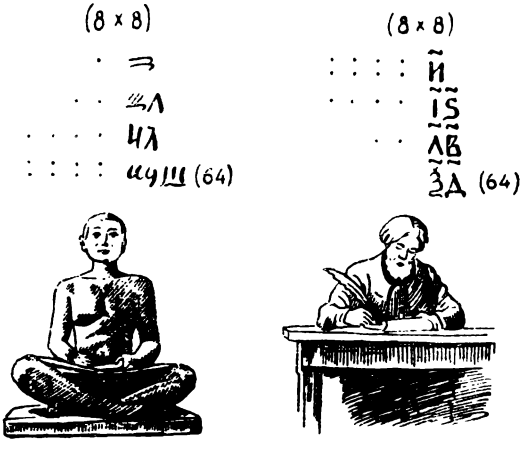


Fig. 24 — Există metode de calcul care au pătruns probabil în Rusia din Egiptul antic.

todă a ajuns pe căi necunoscute din antica țară a piramidelor în epoca contemporană. Dacă i s-ar fi propus, de exemplu, unui locuitor din pămîntul faraonilor să înmulțească 19×17, el ar fi efectuat această operație în modul următor: ar fi scris o serie de dublări ale numărului 17:

1	17+
2	34+
4	68
8	136
16	272+

și apoi ar fi adunat acele numere care sînt notate cu semnul +, adică 17+34+272. El ar fi obținut, desigur, un rezultat corect: $17+(2\times17)+(16\times17)=19\times17$. În esență, această metodă este foarte apropiată de metoda rusă populară (înlocuirea înmulțirii printr-o serie de dublări succesive).

Este greu de spus dacă numai țăranii ruși foloseau această metodă veche de înmulțire; autorii englezi o numesc însă „metodă țărănească rusă".

Ne-ar interesa foarte mult să primim de la cititori informații cu privire la faptul dacă în prezent se folosește undeva această metodă veche de înmulțire, care are un trecut atît de îndelungat și original.

În general ar trebui să acordăm o mare atenție matematicii populare: să căutăm să înțelegem metodele de calcul și măsurătoare folosite de popor, să culegem și să notăm aceste monumente ale creației matematice populare ajunse pînă azi din adîncurile vremurilor îndepărtate.

Lucrul acesta a fost arătat încă de mult de V.V. Bobînin, care s-a ocupat de istoria matematicii și a propus chiar un program scurt de culegere a monumentelor matematicii populare. Credem că nu va fi de prisos să dăm aici lista a ceea ce a crezut el că trebuie cules și notat:

1) numerația și calculul,

2) metode de măsurătoare și cîntărire,

3) informații în legătură cu geometria și expresia lor concretizată în construcții, îmbrăcăminte și podoabe,

4) metode de parcelare,
5) probleme populare,
6) zicători, ghicitori, în general, opere din folclorul popular care au vreo legătură cu cunoştinţele de matematică;
7) monumentele matematicii populare aflate în manuscrise, muzee, colecţii etc. sau găsite cu prilejul săpăturilor făcute în vechile cimitire, cetăţi etc.

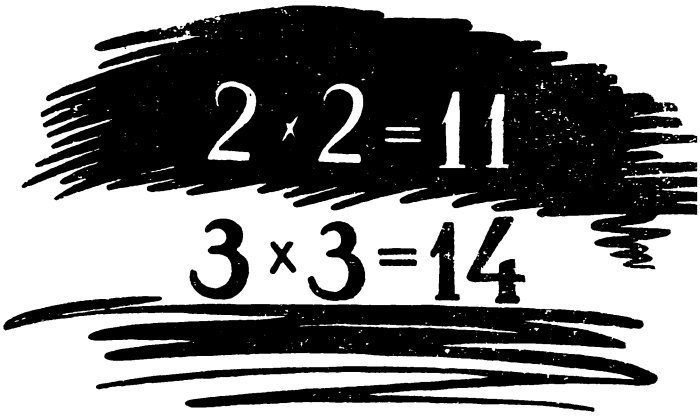
În continuare dau o mică informaţie asupra faptului cînd au apărut pentru prima dată semnele operaţiilor aritmetice, atît de uzuale astăzi, notarea fracţiilor, a puterii etc.:

$+$ şi $-$ în manuscrisele lui Leonardo da Vinci (1452—1519);
$\times$ în lucrarea lui Utred (1631);
. şi : în lucrarea lui Leibnitz (1646—1716);
$\frac{a}{b}$ în lucrarea lui Fibonacci (1202);
a^n în lucrarea lui Chuget (1484);
$=$ în lucrarea lui Recorde (1557);
$<$ şi $>$ în lucrarea lui Harriot (1631);
() şi [ ] în lucrarea lui Girard (1629).

Pe cel care doreşte să cunoască mai amănunţit istoria aritmeticii îl sfătuiesc să citească cartea lui V. Belliustin „Cum au ajuns oamenii treptat pînă la aritmetica actuală. Studii accesibile pentru amatorii de aritmetică“ (1914).

CURIOZITĂŢI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 123+45-67+8-9 \\ 123-45-67+89 \\ (1+2-3-4)\cdot(5-6-7-8-9) \end{cases}$$



CAPITOLUL IV

SISTEMELE DE NUMERAȚIE NEZECIMALE

O AUTOBIOGRAFIE MISTERIOASĂ

Îmi voi permite să încep acest capitol cu o problemă pe care am prezentat-o cîndva pentru cititorii unui vechi jurnal foarte răspîndit[1], drept exemplu de „problemă pentru premiu". Iat-o:

Printre hîrtiile unui matematician a fost găsită autobiografia lui. Ea începea cu următoarele rînduri:

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 44 de ani. După un an, fiind un tînăr de 100 ani, m-am însurat cu o fată de 34 ani. Diferența neînsemnată de vîrstă dintre noi — de numai 11 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei. Peste cîțiva ani aveam deja

[1] „Priroda i lidi" (Ulterior problema a fost publicată în culegerea lui E. I. Ignatiev „În împărăția istețimii").

o mică familie cu 10 copii. Salariul meu era de 200 ruble, din care $^1/_{10}$ îi dădeam surorii mele, aşa încît noi, cu copiii, am trăit cu 130 ruble pe lună" etc.

Cum pot fi explicate contradicţiile curioase dintre numerele prezentate în acest fragment?

Rezolvarea problemei este dictată de însăşi denumirea acestui capitol: sistem de numeraţie nezecimal— iată singura cauză a contradicţiei aparente dintre numerele date mai sus. Sesizînd această idee nu este greu să ne dăm seama în ce anume sistem de numeraţie au fost reprezentate numerele găsite printre însemnările matematicianului. Secretul este trădat de fraza: „după un an (peste 44 ani), fiind un tînăr de 100 ani..." Dacă prin adăugarea unei unităţi numărul 44 se transformă în 100, aceasta înseamnă că cifra 4 este cea m a i m a r e în acest sistem (aşa cum este 9 în sistemul zecimal) şi prin urmare baza sistemului este 5. Fantezistului matematician i-a venit ideea de a scrie toate datele biografiei sale în s i s t e m u l d e n u m e r a ţ i e c i n c i n a l, adică într-un sistem în care unitatea de ordin superior nu este de 10, ci de 5 ori mai mare decît unitatea de ordin inferior. În primul loc din dreapta sînt aşezate unităţile simple (care nu depăşesc 4), în locul al doilea nu sînt zecile, ci cincile; pe locul al treilea nu se află sutele, ci „douăzeci şi cincile" etc. De aceea numărul „44" dat în textul de mai sus nu înseamnă $4\times10+4$, ca în sistemul zecimal, ci $4\times5+4$, adică douăzeci şi patru. Tot astfel numărul „100" din autobiografie indică o unitate de ordinul al treilea în sistemul cincinal, adică 25. Celelalte numere înseamnă respectiv [1]:

$$\text{„}34\text{“}=3\times5+4=19$$
$$\text{„}11\text{“}=5+1=6$$
$$\text{„}200\text{“}=2\times25=50$$
$$\text{„}10\text{“}=5$$
$$\text{„}\frac{1}{10}\text{“}=\frac{1}{5}$$
$$\text{„}130\text{“}=25+3\times5=40$$

[1] Aici şi în cele ce urmează se pun între ghilimele numerele care nu sînt scrise în sistemul de numeraţie zecimal.

Restabilind adevăratul sens al numerelor din notiță, vedem că în ea nu există nici un fel de contradicții:

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 24 ani. După un an m-am însurat, fiind tînăr de 25 ani, cu o fată de 19 ani. Diferența mică de vîrstă dintre noi — de numai 6 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei. Peste cîțiva ani aveam deja o mică familie cu 5 copii. Salariul meu lunar era de 50 ruble, din care 1/5 îi dădeam surorii mele, așa încît noi, cu copiii, am trăit cu 40 ruble pe lună".

Este oare greu să reprezentăm numerele în alte sisteme de numerație? Nicidecum. Presupunem că doriți să reprezentați numărul 119 în sistemul cincinal. Împărțiți 119 cu 5 pentru a afla cîte unități de ordinul întîi are acest număr:

$$119 : 5 = 23, \text{ rest } 4$$

Prin urmare, numărul unităților simple va fi 4. Mai departe, cele 23 de cinci nu pot sta toate în ordinul al doilea; cifra superioară în sistemul cincinal este 4, și nu pot exista mai mult de 4 unități în nici un ordin. De aceea împărțim 23 cu 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ rest } 3$$

Aceasta arată că în ordinul al doilea („al cincilor") se va afla cifra 3, iar ordinul al treilea („al douăzeci și cincilor") 4.

Astfel, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$ sau, în sistemul cincinal, „434".

Pentru comoditate, operațiile de mai sus se orînduiesc în modul următor:

$$\begin{array}{r|l} 119 & 5 \\ \hline 4 & 23 \;\big|\; 5 \\ \hline & 3 \;\big|\; 4 \end{array}$$

Cifrele notate cursiv (putem să le și subliniem cînd le scriem) se scriu de la dreapta spre stînga și se obține imediat reprezentarea căutată a numărului într-alt sistem.

Dăm încă cîteva exemple:

E x e m p l u l 1. Să se reprezinte 47 în sistemul cu baza 3.

Rezolvare:

47	3	
2	15	3
	0	5	3
		2	1

Răspuns: „1202". Verificarea: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$

E x e m p l u l 2. Să se reprezinte numărul 200 în sistemul septenal.

Rezolvare:

200	7	
60	28	7
4	0	4

Răspuns: „404". Verificarea: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$

E x e m p l u l 3. Să se reprezinte numărul 163 în sistemul cu baza doisprezece.

Rezolvare:

163	12	
43	13	12
7	1	1

Răspuns: „117". Verificarea: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Acum nu-i va fi greu cititorului să reprezinte orice număr în orice sistem de numerație. Singura piedică care poate interveni este datorită faptului că în unele cazuri vor fi insuficiente s i m b o l u r i l e p e n t r u c i f r e. Într-adevăr, la reprezentarea numărului în sistemele cu baza mai mare decît zece (de exemplu în sistemul cu baza 12) apare necesitatea de a avea simboluri — cifre pentru „zece" și „unsprezece". Nu este greu de învins această piedică, alegînd pentru cifrele noi oarecare semne convenționale sau litere, fie chiar, de exemplu, literele k și l care în alfabetul

rusesc ocupă locul al zecelea şi al unsprezecelea. Astfel numărul 1 579 în sistemul cu baza 12 se va reprezenta în modul următor.:

1579 | 12		
12 |	131	12
37 |	*11*	*10*
19 |		
7 |		

Răspuns: „(10) (11) 7“, sau KL7.
Verificarea: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1\,579$

P r o b l e m a 1. Să se exprime numărul 1 926 în sistemul cu baza 12[1].

P r o b l e m a 2. Să se exprime numărul 273 în sistemul cu baza 12.

CEL MAI SIMPLU SISTEM DE NUMERAŢIE

Nu este greu să ne dăm seama că în fiecare sistem cifra cea mai mare care poate fi necesară este egală cu baza acestui sistem minus 1. De exemplu, în sistemul zecimal, cifra cea mai mare este 9, în cel şesenal —5, în cel cu baza 3 este 2, în sistemul cu baza 15 va fi 14 etc.

Sistemul de numeraţie cel mai simplu este, desigur, acela pentru care sînt necesare cele mai puţine cifre. În sistemul zecimal sînt necesare 10 cifre (considerîndu-l şi pe zero), în cel cincinal — 5 cifre, în sistemul cu baza 3—3 cifre (1,2 şi 0), în cel binar — numai două cifre (1 şi 0). Există oare un sistem cu baza 1? Desigur: acesta este sistemul în care unităţile de ordin superior sînt o dată mai mari decît unităţile de ordin inferior, adică sînt egale; cu alte cuvinte, se poate numi sistem cu baza 1 sistemul în care unităţile din toate ordinele au aceeaşi valoare. Acesta este sistemul „cel mai pri-

[1] Vezi răspunsul de la sfîrşitul cărţii.

mitiv"; el a fost folosit de omul primitiv care făcea pe copaci atîtea semne cîte obiecte număra. Între acest sistem şi toate celelalte sisteme de numeraţie există însă o deosebire foarte mare: el este lipsit de avantajul principal pe care-l oferă numeraţia noastră — de aşa-numita v a l o a r e p o z i ţ i o n a l ă a c i f r e l o r (în funcţie de locul pe care-l ocupă). Într-adevăr, în sistemul cu baza 1, semnul care ocupă locul 3 sau 5 are aceeaşi valoare ca şi cel de pe locul 1. În acelaşi timp, în sistemul binar unitatea ce stă pe locul 3 (numărînd din dreapta) este deja de 4 ori (2×2) mai mare decît aceea care ocupă locul 1, iar cea din locul 5 este de 16 ori mai mare ($2 \times 2 \times 2 \times 2$). Pentru reprezentarea unui număr oarecare în sistemul cu baza 1 este nevoie de atîtea semne cîte obiecte sînt numărate. Pentru a scrie 100 de obiecte sînt necesare o sută de semne. În sistemul binar însă sînt necesare numai 7 semne („1100100"), iar în cel cincinal numai 3 („400").

Iată de ce sistemul cu baza 1, de fapt, nici nu poate fi numit un „sistem"; el nu poate fi pus alături de celelalte sisteme, deoarece se deosebeşte de ele în mod principial — nu dă nici o economie în ce priveşte reprezentarea numerelor. Dacă nu ţinem seama de acest sistem, atunci sistemul de numeraţie cel mai simplu trebuie considerat sistemul b i n a r , care foloseşte numai două cifre: 1 şi 0. Cu ajutorul unităţii şi al zeroului poate fi reprezentată mulţimea infinită a numerelor! Acest sistem este însă puţin comod pentru numeraţia verbală şi scrisă: se obţin numere prea lungi[1]. Sistemul binar însă s-a dovedit foarte util într-o serie de studii teoretice. În ultimul timp rolul sistemului binar a crescut deosebit de mult, pentru că el stă la baza efectuării calculelor cu maşinile electronice de calcul. El are cîteva particularităţi interesante, care sînt proprii numai acestui sistem; de altfel, aceste particularităţi pot fi folosite într-o serie de scamatorii matematice, despre care vom vorbi amănunţit într-un capitol viitor.

[1] În schimb, după cum vom vedea mai departe, pentru acest sistem, se simplifică la extrem tabla adunării şi tabla înmulţirii.

Noi ne-am obişnuit atît de mult cu operaţiile aritmetice, încît le efectuăm în mod mecanic, fără să ne mai gîndim aproape la ceea ce facem. Dar aceleaşi operaţii ne cer un efort destul de mare, dacă vom încerca să le aplicăm la numerele care nu sînt scrise în sistemul zecimal. Să încercăm, de exemplu, să efectuăm adunarea următoarelor două numere scrise în sistemul cincinal:

$$\begin{array}{r} +\ \text{„4203“} \\ \text{„2132“} \\ \hline \end{array} \quad \text{(în sistem cincinal)}$$

Adunăm începînd cu unităţile, adică din dreapta spre stînga: $3 + 2$ este egal cu cinci; dar noi nu putem scrie 5, pentru că o astfel de cifră nu există în sistemul cincinal: 5 este deja o unitate de ordin superior. Prin urmare suma nu conţine de loc unităţi; scriem zero, iar 5, adică unitatea de ordin imediat superior o ţinem minte. Mai departe: $0 + 3 = 3$ plus unitatea pe care am reţinut-o dă în total 4 unităţi de ordinul al doilea. Pentru ordinul al treilea obţinem $2 + 1 = 3$. În ordinul al patrulea $4 + 2 = 6$, adică $5 + 1$; scriem 1, iar cinci, unitate de ordin superior, o scriem mai la stînga. Suma căutată = „11340“.

$$\begin{array}{r} +\ \text{„4203“} \\ \text{„2132“} \\ \hline \text{„11340“} \end{array} \quad \text{(în sistem cincinal)}$$

Îl lăsăm pe cititor să verifice această adunare, transformînd în prealabil numerele între ghilimele în numere scrise în sistem zecimal.

În mod asemănător se efectuează şi celelalte operaţii aritmetice. Dăm mai jos, pentru exerciţiu, cîteva probleme[1] al căror număr cititorul îl poate mări şi singur:

	Problema 3	Problema 4	Problema 5
În sistem cincinal	$\begin{array}{r} -\ \text{„2143“} \\ \text{„334“} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ \text{„213“} \\ \text{„3“} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \times\ \text{„42“} \\ \text{„31“} \\ \hline \end{array}$

[1] Răspunsul la probleme este dat la sfîrşitul cărţii.

	Problemele 6 și 7		Problemele 8 și 9
În sistem cu baza 3	„212“ + „120“ „201“	× „122“ „20“	„220“ : „2“ = „201“ : „12“ =

La efectuarea acestor operații reprezentăm mai întîi în minte numerele scrise în sistemul zecimal cu care sîntem obișnuiți; obținînd rezultatul, le reprezentăm din nou în sistemul nezecimal cerut de problemă. Putem proceda și altfel: întocmim o „tablă a adunării“ și o „tablă a înmulțirii“ în aceleași sisteme în care ne sînt date numerele și ne folosim direct de aceste table.

De exemplu, tabla adunării în sistem c i n c i n a l se prezintă astfel:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Cu ajutorul acestei table noi am fi putut aduna numerele „4203“ și „2132“, scrise în sistemul cincinal, concentrîndu-ne mai puțin atenția decît în metoda aplicată mai sus.

Se înțelege ușor că se simplifică și operația de scădere.

Întocmim tabla înmulțirii („ lui Pitagora“) pentru sistemul c i n c i n a l:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Avînd acest tabel în faţa ochilor putem uşura foarte mult operaţia de înmulţire (şi împărţire) a numerelor în sistemul cincinal. De exemplu, la înmulţire:

În sistem cincinal
$$\begin{array}{r} \text{„213“} \\ \times\ \text{„3“} \\ \hline \text{„1144“} \end{array}$$

raţionăm astfel: 3 ori 3 „14“ (din tabel); scriem 4, ţinem 1 minte. 1 înmulţit cu 3 dă 3, plus încă unu — scriem 4. 2 ori 3 = „11“; scriem 1 şi mutăm 1 în stînga. Ca rezultat obţinem „1144“.

Cu cît este mai mică baza sistemului, cu atît sînt mai mici şi tablele adunării şi înmulţirii respective. De exemplu, pentru sistemul cu baza 3, cele două table se prezintă astfel:

Tabla adunării pentru sistemul cu baza 3:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Tabla lui Pitagora pentru sistemul cu baza 3:

1	2
2	11

Ele pot fi ţinute minte şi folosite la efectuarea operaţiilor. Tablele de adunare şi de înmulţire cele mai mici se obţin pentru sistemul b i n a r:

Tabla adunării pentru sistemul binar:

0	1
1	10

Tabla înmulţirii pentru sistemul binar:

1×1=1

Cu ajutorul acestor „table“ simple pot fi efectuate în sistemul binar t o a t e c e l e p a t r u o p e r a ţ i i! Cît priveşte înmulţirea în acest sistem, în esenţă ea parcă nici n-ar exista: doar a înmulţi cu 1 înseamnă a lăsa numărul fără nici o schimbare; iar înmulţirea cu „10“, „100“, „1000“ (adică cu 2,4,8) se reduce la simpla adăugare în dreapta deînmulţitului a unui număr corespunzător de zerouri. Pentru efectu-

area adunării trebuie să ţinem minte un singur lucru, şi anume că în sistemul binar $1 + 1 = 10$. Deci am avut dreptate cînd am numit sistemul binar cel mai simplu sistem din toate cele posibile. Lungimea numerelor din această aritmetică originală este compensată de simplitatea efectuării tuturor operaţiilor aritmetice.

Presupunem, de exemplu, că trebuie să înmulţim;

În sistemul binar

„1001011101“
× „100101“
„1001011101“
+ „1001011101“
„1001011101“
„101011101110001“

Efectuarea operaţiei se reduce la transcrierea numerelor date într-o anumită ordine; aceasta cere eforturi mintale mult mai mici, decît înmulţirea acelorași numere în sistemul zecimal ($605 \times 37 = 22\,385$). Dacă am fi adoptat sistemul binar, atunci studiul calculelor scrise ar fi cerut un efort mintal mai mic (în schimb o cantitate maximă de hîrtie şi cerneală). În calculul oral însă aritmetica binară este mult inferioară celei zecimale, în ce priveşte efectuarea operaţiilor.

Dăm mai jos şi un model de împărţire, efectuată în sistemul de calcul binar:

$$\begin{array}{r|l} 10000010 & 111 \\ 111 & 10010 \\ \hline 1001 & \\ 111 & \\ \hline 100 & \end{array}$$

În sistemul zecimal, obişnuit nouă, această operaţie s-ar fi prezentat astfel:

$$\begin{array}{r|l} 130 & 7 \\ 7 & 18 \\ \hline 60 & \\ 56 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

În ambele cazuri deîmpărțitul, împărțitorul, cîtul și restul sînt, în esență, egale, fiind diferite doar calculele intermediare.

PAR SAU IMPAR?

Fără a vedea numărul este greu, desigur, să ghicim dacă el este par sau impar. Dar să nu credeți că veți putea totdeauna să răspundeți la această întrebare imediat ce veți vedea numărul dat. Spuneți, de exemplu, dacă numărul 16 este par sau impar?

Dacă știți că el este scris în sistemul zecimal, atunci sînteți în drept să afirmați că acest număr este par. Dar cînd este scris într-un alt sistem, atunci putem fi oare convinși că el reprezintă într-adevăr un număr par?

Constatăm că nu este așa. Dacă, de exemplu, baza este 7, atunci „șaisprezece" înseamnă $7 + 6 = 13$, adică un număr impar. Același lucru se va întîmpla pentru orice bază impară (pentru că orice număr impar + 6 este de asemenea un număr impar).

De aici tragem concluzia că regula cunoscută nouă de divizibilitate prin 2 (ultima cifră pară) este sigur utilă numai pentru sistemul de numerație zecimal, iar pentru celelalte sisteme nu este totdeauna utilă. Și anume, ea mai servește numai în sistemele de numerație cu baza p a r ă: 6, 8 etc. Care este deci regula de divizibilitate prin 2 pentru sistemul cu baza i m p a r ă? Este suficient să ne gîndim puțin pentru a stabili această regulă: suma cifrelor trebuie să fie pară. De exemplu, numărul „136" este par în orice sistem de numerație, chiar și în cel cu baza impară; într-adevăr, în ultimul caz avem: numărul impar[1] + număr impar + par = număr par.

Tot atît de prudenți trebuie să fim și la rezolvarea următoarei probleme: numărul 25 se împarte întot-

[1] Numărul impar înmulțit cu el însuși (adică cu impar) dă totdeauna un număr impar (de ex.: $7 \times 7 = 49$; $11 \times 11 = 121$ etc.).

deauna cu 5? În sistemul cu baza 7 sau 8 numărul astfel reprezentat nu se împarte cu 5 (pentru că el este egal cu 19 sau cu 21). Cît privește regula binecunoscută a divizibilității prin 9 (dacă suma cifrelor este divizibilă cu 9), ea este justă numai pentru sistemul zecimal. În sistemul cincinal însă această regulă este valabilă pentru 4, iar în cel cu baza 7 — pentru 6. Astfel, numărul „323" în sistemul cincinal se împarte cu 4, pentru că $3 + 2 + 3 = 8$, iar numărul „51" în sistemul cu baza 7 — cu 6 (ne convingem de lucrul acesta transformînd numerele în sistemul zecimal: obținem respectiv 88 și 36). De ce este așa, cititorul își va da seama singur, dacă va înțelege bine modul de deducere a regulii de divizibilitate prin 9 și va folosi același raționament la deducerea regulii de divizibilitate cu 6, cu schimbările respective pentru sistemul cu baza 7.

Este mai greu să se demonstreze pe cale pur aritmetică justețea următoarelor:

$$\left.\begin{aligned} 121 : 11 &= 11 \\ 144 : 12 &= 12 \\ 21 \times 21 &= 441 \end{aligned}\right\}$$ în toate sistemele de numerație (în care există cifrele respective).

Cei care cunosc bazele algebrei vor găsi ușor explicația acestor egalități. Ceilalți cititori pot să le verifice pentru diferite sisteme de numerație.

PROBLEME INSTRUCTIVE

1) Cînd $2 \times 2 = 100$?
2) Cînd $2 \times 2 = 11$?
3) Cînd 10 este număr impar?
4) Cînd $2 \times 3 = 11$?
5) Cînd $3 \times 3 = 14$?

Răspunsul la aceste întrebări nu va părea greu de găsit celor care au citit capitolul de față.

1) $2 \times 2 = 100$ cînd 100 este scris în sistemul binar.
2) $2 \times 2 = 11$ cînd 11 s-a scris în sistemul cu baza 3.

3) 10 este număr impar cînd el a fost scris în sistemul cu baza 5, precum şi în sistemele cu bazele 3,7 şi 9.
4) $2 \times 3 = 11$ cînd 11 s-a scris în sistemul cu baza 5.
5) $3 \times 3 = 14$ cînd 14 s-a scris în sistemul cu baza 5.

FRACŢII FĂRĂ NUMITOR

Noi ne-am obişnuit cu faptul că se scriu fără linie de fracţie numai fracţiile z e c i m a l e. De aceea, la prima vedere se pare că fracţiile 2/7 sau 1/3 nu pot fi scrise fără linie de fracţie. Lucrurile ni se vor prezenta însă altfel, dacă ne vom aminti că fracţiile fără linie de fracţie sînt posibile şi în alte sisteme de numeraţie. Ce înseamnă, de exemplu, fracţia „0,4" în sistemul cu baza 5? Desigur, 4/5. Fracţia „1,2" în sistemul cu baza 7 înseamnă $1^2/_7$. Dar ce înseamnă, în acelaşi sistem cu baza 7, fracţia „0,33"? Aici rezultatul este mai complicat: $3/7 + 3/49 = 24/49$.

Vom examina cîteva fracţii nezecimale fără linie de fracţie. Cu cît sînt egale:

a) „2,121" în sistemul cu baza 3?
b) „1,011" în sistemul binar?
c) „3,431" în sistemul cu baza 5?
d) „2,(5)" în sistemul cu baza 7?

Răspunsuri:

a) $2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = 2\frac{16}{27}$

b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{3}{8}$

c) $3 + \frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{1}{125} = 3\frac{116}{125}$

d) $2 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343} + \ldots = 2\frac{5}{6}$

Cititorul se va convinge de justeţea ultimei egalităţi, dacă va încerca să aplice la cazul de faţă, cu schimbă-

rile corespunzătoare, raţionamentele legate de transformarea fracţiilor zecimale şi periodice în fracţii simple.

Acum vom examina cîteva probleme speciale (vezi răspunsul la sfîrşitul cărţii).

P r o b l e m a 10. În ce sistem de numeraţie este efectuată următoarea adunare:

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ +\ 2456 \\ 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

P r o b l e m a 11. În ce sistem de numeraţie este efectuată împărţirea:

$$\begin{array}{l} 4415400 : 4532 = 543 \\ -\ 40344 \\ \hline -\ 34100 \\ \quad\ 31412 \\ \hline -\ 22440 \\ \quad\ 22440 \\ \hline 0 \end{array}$$

P r o b l e m a 12. Scrieţi numărul „o sută treizeci“ în toate sistemele de numeraţie, de la cel binar pînă la cel zecimal inclusiv.

P r o b l e m a 13. Cu cît este egal numărul „123“ dacă-l considerăm scris în toate sistemele de numeraţie, inclusiv cel cu baza 9? Este posibil ca acest număr să fi fost scris în sistemul binar? Dar în cel cu baza 3? În cazul că a fost scris în sistemul cu baza 5, atunci puteţi afla, fără a-l transforma în sistemul zecimal, dacă el se împarte fără rest cu 6? Dacă numărul a fost scris în sistemul zecimal, atunci se împarte fără rest cu 4?

CURIOZITATE ARITMETICĂ:

$$2^5 \cdot 9^2 = 2\,592$$

UN PICIOR = 12 DEGETE

UN METRU = 10 DECIMETRI

CAPITOLUL V

GALERIA CURIOZITĂŢILOR NUMERICE

MUZEUL DE CURIOZITĂŢI ARITMETICE

În lumea cifrelor, ca şi în lumea fiinţelor, se întîlnesc adevărate curiozităţi, exemplare rare care posedă proprietăţi excepţionale. Din astfel de numere s-ar fi putut întocmi un muzeu de rarităţi numerice, un adevărat muzeu „de curiozităţi aritmetice". În vitrinele lui şi-ar fi găsit loc nu numai uriaşii numerici, despre care vom vorbi într-un capitol aparte, ci şi numere de dimensiuni modeste, care ies din comun prin anumite proprietăţi neobişnuite. Unele dintre ele atrag atenţia cititorului chiar la prima vedere, celelalte îşi manifestă particularităţile lor deosebite numai la examinarea mai atentă.

Exemplarele interesante prezentate în „galeria" noastră de numere nu au nimic comun cu acele curiozităţi imaginare, pe care le întrezăresc în unele numere amatorii a tot ce este misterios. Un exemplu de asemenea superstiţie în legătură cu numerele îl poate prezenta următorul raţionament aritmetic, exprimat cu imprudenţă de cunoscutul scriitor francez Victor Hugo:

„Trei — este un număr perfect. Pentru numărul 3 unitatea este acelaşi lucru ca şi diametrul pentru cerc. Printre celelalte numere 3 reprezintă acelaşi lucru ca şi cercul printre figuri. Numărul 3 este singurul care are un centru. Celelalte numere sînt nişte elipse, care au două focare. De aici următoarea particularitate, caracteristică numai pentru numărul 3: adunaţi cifrele oricărui număr multiplu de 3 — suma se împarte totdeauna cu 3, fără rest."

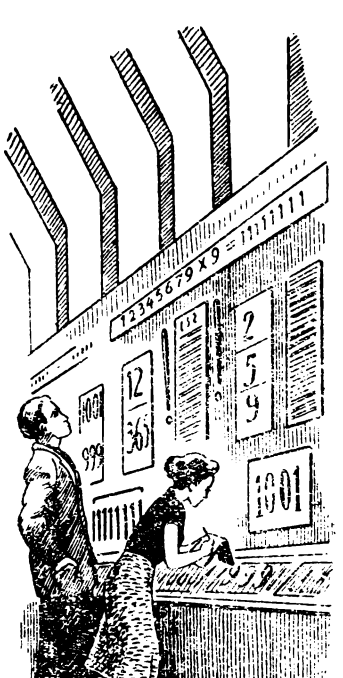


Fig. 25 — Vitrina curiozităţilor numerice.

În acest raţionament nebulos şi aparent „profund" nu este nimic just; în fiecare frază fie o prostie, fie o totală lipsă de sens. Este justă numai observaţia cu privire la proprietatea sumei cifrelor, însă această proprietate nu decurge din cele spuse şi, pe lîngă aceasta, nu reprezintă o particularitate exclusivă a numărului 3; aceeaşi proprietate caracterizează, în sistemul zecimal, şi numărul 9,

iar în celelalte sisteme — numerele mai mici cu o unitate decît baza.

Curiozităţile din „galeria" noastră sînt de alt gen: în ele nu există nimic misterios, nimic de neînţeles.

Îl invit pe cititor să facă o vizită în galeria acestor curiozităţi numerice şi să cunoască unele din ele.

Vom trece, fără se ne oprim, pe lîngă primele vitrine care cuprind numere ale căror proprietăţi le cunoaştem bine. Bănuim deja de ce a nimerit în galeria curiozităţilor numărul 2: nu pentru că el este primul număr par[1], ci pentru că el este baza celui mai interesant sistem de numeraţie (vezi pag. 81-82).

Nu ne vom mira nici atunci cînd vom găsi aici numărul 9, desigur, nu ca „simbolul fidelităţii"[2], ci ca număr care ne uşurează verificarea tuturor operaţiilor aritmetice (vezi pag. 61-65).

NUMĂRUL 12

Ce particularitate are acest număr? Este numărul lunilor dintr-un an şi numărul de unităţi dintr-o duzină. Dar ce reprezintă, în fond, neobişnuit o duzină? Sînt puţini cei care cunosc că 12 este un concurent vechi şi cît p-aci învingător al numărului 10 în lupta pentru locul de onoare ca bază a sistemului de numeraţie. Unul din popoarele cele mai culte din Orientul antic — babilonienii şi strămoşii lor sumerienii — efectuau calcule în sistemul de numeraţie cu baza 12. În unele domenii folosim şi noi acest sistem, cu toate că victorios a ieşit sistemul zecimal. Predilecţia noastră pentru duzine şi „groşi"[3]), împărţirea unei zile şi nopţi în două duzini de ore şi a orei în cinci duzini de minute, împărţirea minutului în tot atîtea secunde, împărţirea cercului în 30 de duzini de grade şi, în sfîrşit, împărţirea piciorului în 12 ţoli — toate acestea nu sînt oare o mărturie a marii influenţe a sistemului antic în zilele noastre?

[1] Primul număr par poate fi considerat 0 şi nu 2.

[2] Anticii (urmaşii lui Pitagora) considerau că 9 este simbolul fidelităţii „pentru că toate numerele multiple lui 9 au suma cifrelor multiplă lui 9".

[3] Un gros = 12 duzini. Într-o cutie de peniţe este 1 gros — 144 bucăţi.

Este bine oare că în lupta dintre duzină și zece a învins acesta din urmă? Desigur că aliații cei mai puternici ai zecelui au fost și rămîn mîinile noastre proprii cu cele 10 degete — mașini de calcul vii. Dacă nu ar fi fost acest lucru atunci ar fi trebuit, fără îndoială, să-l preferăm pe 12 în loc de 10. Este mult mai comodă efectuarea calculelor în sistemul cu baza 12, decît în sistemul zecimal. Aceasta pentru că numărul 10 se împarte fără rest cu 2 și cu 5, în timp ce 12 se împarte cu 2,3,4,6. Numărul 10 nu poate fi împărțit decît de două numere fără rest, pe cînd 12 are patru divizori. Avantajele sistemului cu baza 12 ne vor deveni și mai clare dacă vom ține seama de faptul că în acest sistem numărul care se termină cu zero este divizibil și cu 2, și cu 3, și cu 4, și cu 6; gîndiți-vă cît de comod este să împărțiți un număr cînd și 1/2, și 1/3, și 1/4, și 1/6 din el sînt numere întregi! Dacă însă numărul exprimat în sistemul cu baza 12 se termină cu două zerouri, atunci el trebuie să se împartă fără rest cu 144, prin urmare și la toți divizorii lui 144, adică la următorul șir de numere:

2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144

Avem deci 14 divizori în locul celor 8 pe care-i au numerele scrise în sistemul zecimal, atunci cînd ele se termină cu două zerouri (2,4,5,10,20,25,50, și 100). În sistemul nostru numai fracțiile de tipul 1/2, 1/4, 1/5, 1/20 etc. pot fi transformate în zecimale finite; în sistemul cu baza 12 putem scrie, fără numitor, fracții mult mai variate: 1/2, 1/3, 1/4, 1/6, 1/8, 1/9, 1/12, 1/16, 1/18, 1/24, 1/36, 1/48, 1/72, 1/144 care, respectiv, vor deveni:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01

Am greși însă dacă am crede că divizibilitatea numărului poate depinde de sistemul în care este reprezentat. Dacă nucile cuprinse într-un sac pot fi împărțite în 5 grămezi egale, atunci, desigur, această proprietate a lor nu se va schimba în funcție de sistemul de numerație în care va fi reprezentat numărul și nici de faptul că acest număr a fost luat pe abacă, scris cursiv, sau, în sfîrșit, într-un oarecare alt mod. Cînd numărul scris

în sistemul cu baza 12 se împarte cu 6 sau cu 72, atunci fiind exprimat într-un alt sistem de numerație, de exemplu în cel zecimal, el trebuie să aibă aceiași divizori. Diferența constă numai în faptul că în sistemul cu baza 12 divizibilitatea cu 6 sau cu 72 poate fi mai ușor remarcată (numărul se termină cu unul sau cu două zerouri).

Ținînd seama de avantajele oferite de sistemul cu baza 12, nu este de mirare că printre matematicieni unii cereau trecerea completă în acest sistem. Noi însă ne-am obișnuit prea mult cu sistemul zecimal pentru a ne hotărî să facem o astfel de reformă.

Marele matematician francez Laplace spunea în legătură cu această problemă: „baza sistemului nostru de numerație nu se împarte cu 3 și cu 4, adică cu cei doi divizori care sînt atît de mult folosiți datorită simplității lor. Adăugarea a două semne (cifre) ar fi dat sistemului de numerație acest avantaj; însă inovația ar fi fost, fără îndoială, refuzată. Noi am fi pierdut avantajul care a dat naștere aritmeticii noastre — posibilitatea de a număra cu ajutorul degetelor de la mîini".

Pentru a introduce însă uniformitate în toate calculele ar fi trebuit să se treacă la același sistem de numerație și pentru măsurarea arcelor de cerc.

S-a încercat să se facă această reformă în Franța, dar ea nu a prins. Însuși Laplace a fost un partizan convins al acestei reforme. Cunoscuta lui carte „Expunerea sistemului lumii" este un exemplu de folosire a subîmpărțirii zecimale a unghiurilor; la el este numit grad fracțiunea a o suta și nu a nouăzecea parte din unghiul drept, minutul constituie a suta parte din grad etc. Laplace milita chiar pentru subîmpărțirea zecimală a orelor și a minutelor. „Uniformitatea sistemelor de măsură necesită ca ziua să fie împărțită în 100 ore, ora în 100 minute și minutul în 100 secunde", scria el.

Vedeți prin urmare că duzina are o istorie îndelungată și că pe bună dreptate numărul 12 a intrat în galeria curiozităților numerice. În schimb, vecina lui, „duzina dracului", 13, nu figurează aici pentru că ar

fi deosebit de interesantă, ci poate tocmai datorită faptului că nu prezintă nici un interes, deşi are o faimă atît de sumbră. Oare nu este de mirare faptul că un număr, care nu are nici un fel de particularităţi interesante, a putut deveni atît de „teribil" pentru oamenii superstiţioşi?

Cît de răspîndită era această superstiţie (care a luat naştere în Babilonul antic), se vede din faptul că în epoca ţarismului, cînd s-a construit linia de tramvai electric la Petersburg, mult timp nu au îndrăznit să introducă linia nr. 13 şi s-a trecut dintr-o dată la nr. 14; autorităţile credeau că publicul nu va accepta transportul în vagoane care poartă un număr atît de „nenorocos". Este curios de asemenea că la Petersburg erau multe case în care lipseau locuinţele cu nr. 13... Adesea în hoteluri nu existau camere cu nr. 13. Cîndva, în apus (de exemplu în Anglia) erau înfiinţate chiar „cluburi ale nr. 13" pentru a lupta împotriva acestei superstiţii numerice nefondate...

În vitrina următoare a muzeului de curiozităţi aritmetice avem în faţa noastră:

NUMĂRUL 365

El este remarcabil, înainte de toate, prin faptul că indică numărul zilelor dintr-un an. Mai departe, la împărţirea cu 7 el dă ca rest 1; această particularitate a numărului 365, deşi aparent neesenţială, are mare importanţă pentru calendarul nostru bazat pe săptămîna de 7 zile.

O altă particularitate a numărului 365, care nu este legată de calendar:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

adică, 365 este egal cu suma pătratelor a trei numere consecutive, începînd cu 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$$

Fig. 26 — Cunoașteți particularitățile acestui număr?

Fig. 27 — Tabloul pictorului Bogdanov-Belski „O problemă grea".

Cu aceasta însă nu am terminat, acelaşi rezultat îl dă şi suma pătratelor a două numere imediat următoare, 13 şi 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365$$

Pe această proprietate a numărului 365 s-a bazat problema lui S. A. Racinski, reprezentată în cunoscutul tablou „O problemă grea" a lui Bogdanov-Belski (fig. 27):

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

Sînt puţine numere de acest fel în galeria noastră de curiozităţi aritmetice.

TREI DE NOUĂ

În vitrina următoare găsim numărul cel mai mare dintre toate numerele de trei cifre: 999. Este neîndoielnic faptul că acest număr este mult mai interesant decît imaginea lui răsturnată — 666 — renumitul „număr al fiarelor" din apocalips, care trezea o frică neîntemeiată în sufletele multor oameni superstiţioşi, dar prin proprietăţile sale aritmetice nu prezintă nimic deosebit în rîndul celorlalte numere.

Fig. 28 — Un număr cu care se înmulţeşte uşor.

O particularitate curioasă a numărului 999 se manifestă la înmulţirea lui cu orice alt număr format din trei cifre. În urma înmulţirii se obţine un produs format din şase cifre: primele trei cifre reprezintă numărul

cu care am înmulțit, micșorat cu o unitate, iar celelalte trei cifre „completează" pe cele dintîi pînă la 9. De exemplu:

$$573 \times 999 = \begin{array}{r} 572 \\ \hline 572\,427 \\ \hline 999 \end{array}$$

Pentru a înțelege de unde provine această particularitate este suficient să urmărim rîndul care urmează:

$$573 \times 999 = 573 \times (1\,000 - 1) = \begin{cases} 573\,000 \\ -\ \ 573 \\ \hline 572\,427 \end{cases}$$

Cunoscînd această particularitate, putem înmulți „instantaneu" cu numărul 999 orice număr format din trei cifre:

$$947 \times 999 = 946\,053$$
$$509 \times 999 = 508\,491$$
$$981 \times 999 = 980\,019 \text{ etc.}$$

Și, deoarece $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$ puteți scrie cu o rapiditate uimitoare coloane întregi de numere formate din șase cifre, multiple lui 37; cititorul care nu cunoaște proprietățile numărului 999, desigur, nu va fi în stare să facă acest lucru. Cu alte cuvinte, veți putea face încercări de „înmulțiri și împărțiri instantanee".

NUMĂRUL ȘEHERAZADEI

Numărul care vine la rînd este numărul 1 001 — cunoscutul număr al Șeherazadei. Probabil nici nu știați că în însăși denumirea vestitei culegeri de povești arabe găsim o minune sui-generis, care ar fi putut să frapeze imaginația sultanului din povești, cel puțin în aceeași măsură ca celelalte minuni ale Orientului, dacă el ar fi fost capabil să se intereseze de curiozitățile aritmetice.

Prin ce este oare remarcabil numărul 1 001? La prima vedere el pare foarte obişnuit. Nici măcar nu face parte din categoria numerelor „prime" — o categorie a numerelor alese. El se împarte însă fără rest

Fig. 29 — Numărul Şeherazadei.

şi cu 7, şi cu 11 şi cu 13 — adică cu trei numere prime consecutive, al căror produs este de fapt. Dar aceasta nu constituie trăsătura care imprimă curiozitatea numărului; este interesant că atunci cînd un număr alcătuit din trei cifre este înmulţit cu 1 001, rezultatul va fi format din deînmulţitul însuşi scris de două ori, de exemplu:

$$873 \times 1\,001 = 873\,873$$
$$207 \times 1\,001 = 207\,207 \text{ etc.}$$

Rezultatul este evident, pentru că $873 \times 1\,001 = 873 \times 1\,000 + 873 = 873\,000 + 873$; totuşi, folosind proprietatea arătată mai sus a „numărului Şeherazadei", se pot obţine rezultate cu totul neaşteptate, cel puţin pentru un om neiniţiat.

Iată, puteţi să uimiţi un cerc de tovarăşi, care nu cunosc tainele aritmeticii, arătîndu-le următoarea scamatorie. Cereţi unuia dintre ei să scrie pe o hîrtie, fără să v-o arate, un număr cu trei cifre, iar apoi să alăture la acesta încă o dată acelaşi număr. Se obţine un număr de 6 cifre, compus din trei cifre care se repetă. Propuneţi acum aceluiaşi tovarăş sau vecinului lui să împartă, fără să vedeţi ce scrie el, acest număr cu 7; îl preveniţi totodată că nu va avea rest. Rezultatul este transmis unui alt vecin, care la propunerea dumneavoastră îl împarte cu 11; şi, deşi nu cunoaşteţi deîmpărţitul, afirmaţi totuşi cu curaj că şi acesta se va împărţi fără rest. Rezultatul obţinut îl treceţi unui

alt tovarăş, pe care-l rugaţi să împartă numărul cu 13, prevenindu-l că împărţirea se face tot fără rest. Rezultatul celei de-a treia împărţiri, fără a privi numărul obţinut, îl înmînaţi primului tovarăş spunîndu-i: „Acesta este numărul pe care l-aţi scris!"

Este just, aţi ghicit.

Care este secretul scamatoriei?

Această frumoasă scamatorie aritmetică se explică foarte simplu: amintiţi-vă că a scrie în dreapta unui număr de trei cifre acelaşi număr înseamnă a-l înmulţi cu 1 001, adică cu produsul $7 \times 11 \times 13$. Numărul de şase cifre, pe care tovarăşul dumneavoastră îl obţine după ce scrie alături de două ori numărul ales, va trebui, prin urmare, să se împartă fără rest şi cu 7, şi cu 11, şi cu 13; rezultatul împărţirii succesive cu aceste trei numere (adică cu produsul lor — 1 001) va trebui să dea din nou numărul iniţial.

Această scamatorie poate să fie schimbată, după dorinţă, astfel încît totuşi să avem posibilitatea de a declara celui care şi-a ales un număr rezultatul calculelor lui. Ştiţi că numărul de şase cifre, care stă la baza calculelor, este egal cu produsul dintre: numărul ales $\times 7 \times 11 \times 13$.

De aceea, dacă cereţi să se împartă acest număr de şase cifre întîi cu 7, apoi cu 11, iar după aceea cu numărul ales, atunci puteţi să afirmaţi cu convingere că rezultatul final al tuturor împărţirilor este 13.

Repetînd scamatoria veţi cere să se efectueze împărţirile într-o altă ordine: întîi cu 11, apoi cu numărul ales şi, în sfîrşit, cu 13. Ultima împărţire trebuie să dea rezultatul 7. Ordinea mai poate fi următoarea: întîi 13, apoi numărul ales şi la sfîrşit 7; rezultatul final — 11.

NUMĂRUL 10101

După cele spuse despre numărul 1 001 nu ne vom mira găsind în vitrinele galeriei noastre numărul 10 101. Vă daţi seama, cred, ce proprietate anume îl face să se bucure de atîta cinste. El, ca şi numărul 1 001, dă

rezultate interesante la înmulțirea numerelor formate din d o u ă cifre; fiecare număr de două cifre înmulțit

Fig. 30 — Număr util pentru scamatorii.

cu 10 101 dă ca rezultat un număr egal cu de trei ori numărul ales.
De exemplu:

$$73 \times 10\,101 = 737\,373$$
$$21 \times 10\,101 = 212\,121$$

Cauza se află din:

$$73 \times 10\,101 = 73\,(10\,000 + 100 + 1) = \left\{ \begin{array}{r} 730\,000 \\ +\ 7\,300 \\ +\ \quad 73 \\ \hline 737\,373 \end{array} \right.$$

Putem face oare cu ajutorul acestui număr scamatorii de genul celor prezentate anterior, la numărul 1 001?

Da, putem. Scamatoria aceasta este chiar mai interesantă, dacă avem în vedere faptul că 10 101 este un produs a patru numere simple:

$$10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$$

Propunînd unui tovarăș să scrie un număr oarecare format din două cifre, îi cereți celui de-al doilea să adauge același număr, iar unui al treilea să repete încă o dată numărul. Pe cel de-al patrulea îl rugați să împartă numărul de 6 cifre, astfel obținut, de exemplu cu 7; al cincilea tovarăș trebuie să împartă rezultatul cu 3; un al șaselea face împărțirea rezultatului cu 37, și, în sfîrșit, al șaptelea împarte acest rezultat cu 13; anunțați în prealabil că toate cele patru operații se

efectuează fără rest. Rezultatul ultimei împărțiri rugați să fie transcris primului tovarăș; acest rezultat este chiar numărul pe care l-a ales.

La repetare, scamatoria puteți s-o variați în oarecare măsură, folosind de fiecare dată alți divizori. Astfel, în loc de patru divizori $3 \times 7 \times 13 \times 37$ veți lua următoarele grupuri de trei termeni:

$$21 \times 13 \times 37; 7 \times 39 \times 37; 3 \times 91 \times 37; 7 \times 13 \times 111$$

Această scamatorie poate fi ușor schimbată, așa cum s-a explicat în cazul precedent (în legătură cu numărul 1 001).

S-ar putea spune chiar că numărul 10 101 este mai interesant decît numărul Șeherazadei, deși proprietățile lui extraordinare sînt mai puțin cunoscute. De altfel, despre el s-a scris încă cu 200 de ani în urmă, în „Aritmetica" lui Magnițki. Aici e citat ca exemplu de înmulțire care prezintă „oarecari curiozități". Cu atît mai îndreptățiți sîntem noi să-l includem în colecția noastră de curiozități aritmetice.

NUMĂRUL 10 001

Și acest număr se pretează la scamatoriile de genul celor de mai sus, deși ele nu sînt chiar atît de atră-

Fig. 31 — Un alt număr folosit în scamatorii.

gătoare. Aceasta pentru că numărul din paragraful de față este un produs a numai două numere simple: $10\,001 = 73 \times 137$.

Cum putem folosi acest lucru la efectuarea operațiilor aritmetice care prezintă „oarecari curiozități", cred că cititorul și-a dat seama din cele spuse mai sus.

ȘASE UNITĂȚI

În vitrina următoare întîlnim o nouă curiozitate a muzeului de rarități aritmetice — un număr format din șase unități. Cunoscînd proprietățile numărului 1 001 ne dăm seama imediat că $111\,111 = 111 \times 1\,001$.

Fig. 32 — Un număr util pentru cel care ghicește.

Cum $111 = 3 \times 37$, iar $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, decurge că noul nostru fenomen numeric, format numai din unități, reprezintă un produs de cinci factori simpli. Combinînd acești cinci factori în două grupuri, în diferite feluri, obținem 15 perechi de termeni care dau același număr 111 111:

$3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37\,037 = 111\,111$
$7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 7 \times 13\,873 = 111\,111$
$11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) = 11 \times 10\,101 = 111\,111$
$13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) = 13 \times 8\,547 = 111\,111$
$37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) = 37 \times 3\,003 = 111\,111$
$(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) = 21 \times 5\,291 = 111\,111$
$(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) = 33 \times 3\,367 = 111\,111$

etc.

Prin urmare, puteți da la 13 tovarăși să se ocupe cu înmulțirea și, deși fiecare va înmulți o altă pereche de numere, toți vor obține același rezultat: 111 111.

Numărul 111 111 poate fi folosit şi pentru ghicirea numerelor alese, de genul scamatoriilor efectuate cu ajutorul lui 1 001 şi 10 101. În cazul de faţă se propune să se aleagă numere formate dintr-o singură cifră, care să se repete de şase ori. Drept divizori aici pot servi cinci numere simple: 3,7,11,13,37 şi produsele lor: 21, 33, 39 etc. Aceasta dă posibilitatea de a varia foarte mult efectuarea scamatoriei.

Din exemplul numărului 111 111 cititorul vede cum poate fi folosit, în scamatoriile aritmetice, un număr format numai din unităţi, dacă acest număr se descompune în factori. Din fericire pentru amatorii unor asemenea scamatorii, multe numere nu sînt prime, ci compuse.

Din primele 17 numere de acest gen numai două (cele mai mici) — 1 şi 11 — sînt numere prime, iar celelalte sînt compuse. Iată cum se descompun în factori primi primele zece numere compuse formate numai din unităţi:

$$
\begin{aligned}
111 &= 3\times37\\
1\,111 &= 11\times101\\
11\,111 &= 41\times271\\
111\,111 &= 3\times7\times11\times13\times37\\
1\,111\,111 &= 239\times4\,649\\
11\,111\,111 &= 11\times73\times101\times137\\
111\,111\,111 &= 9\times37\times333\,667\\
1\,111\,111\,111 &= 11\times41\times271\times9\,091\\
11\,111\,111\,111 &= 21\,649\times513\,239\\
111\,111\,111\,111 &= 3\times7\times11\times13\times37\times101\times9\,901
\end{aligned}
$$

Toate numerele de mai sus pot fi folosite pentru scamatorie; în unele cazuri însă această scamatorie l-ar sili pe cel care efectuează operaţiile să facă o muncă prea complicată. Numerele formate din 3,4,5,6,8,9,12 unităţi sînt cele mai utile în acest scop. Modelele de folosire a acestora pentru scamatorii aritmetice vor fi date la sfîrşitul capitolului următor.

În vitrinele următoare ale galeriei noastre ne uimesc curiozităţi aritmetice de un alt gen — un fel de piramide formate din cifre.

Cum se explică asemenea rezultate originale ale înmulţirii?

Pentru a înţelege această regularitate curioasă, luăm ca exemplu unul din rîndurile primei piramide (fig. 33) numerice: $123\,456 \times 9 + 7$. În locul înmulţirii cu 9 se poate face înmulţirea cu (10—1), adică să se adauge 0 şi să se scadă deînmulţitul:

$$123\,456 \times 9 + 7 = 1\,234\,560 + 7 - 123\,456 = \begin{cases} 1\,234\,567 \\ -\ 123\,456 \\ \hline 1\,111\,111 \end{cases}$$

Este suficient să privim ultima scădere ca să înţelegem de ce obţinem un rezultat format numai din unităţi.

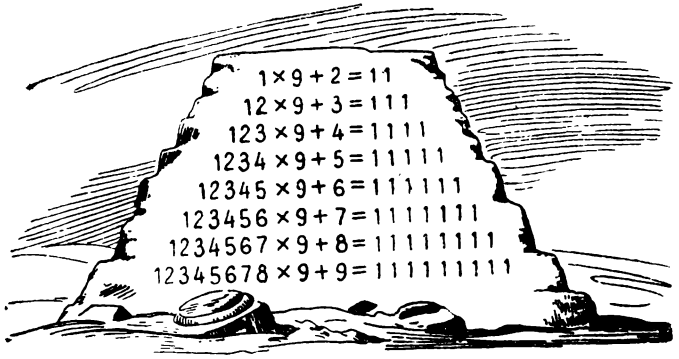


Fig. 33 — Prima piramidă numerică.

Putem să ne lămurim şi pornind de la alte raţionamente. Pentru ca numărul de forma 12 345... să se transforme într-un număr de forma 11 111... este necesar ca din cifra lui a doua să se scadă 1, din cea de-a treia — 2, din cea de-a patra — 3, din a cincea — 4 etc.; sau,

cu alte cuvinte, să se scadă din el același număr de tipul 12 345..., scurtat cu ultima lui unitate, adică micșorat de 10 ori și lipsit în prealabil de ultima lui cifră. Acum este limpede că pentru obținerea rezultatului căutat numărul nostru trebuie înmulțit cu 10, să i se adauge cifra care urmează după ultima și să

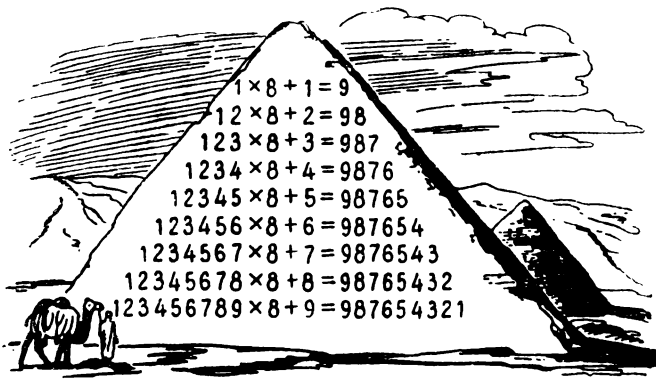


Fig. 34 — A doua piramidă numerică.

se scadă din rezultat numărul inițial (or a înmulți cu 10 și a scădea numărul inițial înseamnă a înmulți cu 9).

În mod asemănător se explică și formarea piramidei numerice următoare (fig. 34), care se obține la înmulțirea unui anumit șir de cifre cu 8 și adăugarea cifrelor care cresc succesiv. Deosebit de interesant este ultimul șir din piramidă, unde în rezultatul înmulțirii cu 8 și a adăugirii lui 9 are loc transformarea șirului natural al cifrelor în același șir, dar cu așezarea inversă.

Vom încerca să explicăm această particularitate. Dacă privim rîndul care urmează observăm:

$$12\,345\times8+5 = \begin{cases} - & 12\,345\times9+6 \\ - & 12\,345\times1+1 \end{cases} = \begin{cases} - & 111\,111\,^{1} \\ & 12\,346 \end{cases}$$

[1] De ce 12 345 × 9 + 6 dă tocmai 111 111 s-a arătat la piramida numerică precedentă.

adică 12 345×8+5 = 111 111—12 346. Scăzînd însă din numărul 111 111 numărul 12 346, format dintr-un şir de cifre crescătoare, noi, cum se poate uşor înţelege, trebuie să obţinem un şir de cifre descrescătoare 98 765.

Iată, în sfîrşit, cea de-a treia piramidă numerică care necesită de asemenea explicaţii (fig. 35).

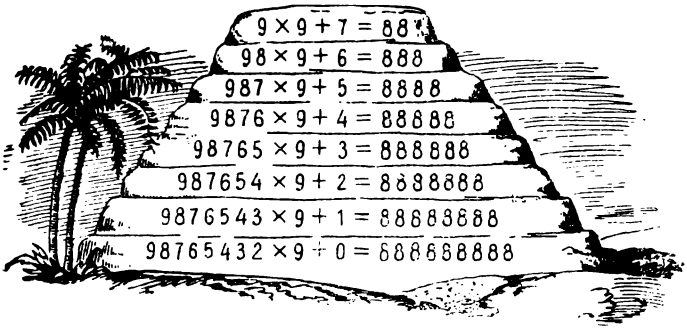


Fig. 35 — **A treia piramidă numerică.**

Această piramidă este urmarea directă a primelor două. Legătura se stabileşte foarte uşor. Din p r i m a piramidă, de exemplu, ştim deja că:

$$12\,345\times9+6=111\,111$$

Înmulţind ambele părţi cu 8 avem:

$$(12\,345\times8\times9)+(6\times8)=888\,888$$

Din cea de-a d o u a piramidă se ştie că:

$12\,345\times8+5=98\,765$, deci $12\,345\times8=98\,760$

Prin urmare,

$$888\,888=(12\,345\times8\times9)+(6\times8)=(98\,760\times9)+48=$$
$$=(98\,760\times9)+(5\times9)+3=(98\,760+5)\times9+3=$$
$$=98\,765\times9+3$$

Iată deci, că toate aceste piramide numerice nu sînt chiar atît de misterioase pe cît ni se par. Totuşi mulţi le consideră încă inexplicabile. Mi s-a întîmplat să

le văd tipărite într-un ziar german cu explicația: „Cauza acestei regularități uimitoare nu a fost explicată pînă în prezent de nimeni"...

NOUĂ CIFRE EGALE

Ultimul rînd din prima „piramidă" examinată (fig. 33)

$$12\,345\,678\times 9+9=111\,111\,111$$

reprezintă un model de un întreg grup de curiozități aritmetice interesante, culese în muzeul nostru și aranjate într-un tabel (vezi fig. 36).

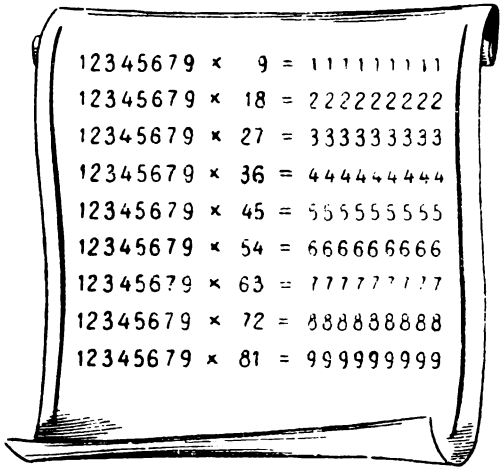


Fig. 36 **— Cazuri interesante de înmulțire.**

De unde provine această regularitate observată în rezultate?

Vom ține seama de faptul că

$$12\,354\,678\times 9+9=(12\,345\,678+1)\times 9=$$
$$=12\,345\,679\times 9$$

De aceea,

$$12\,345\,679\times 9 = 111\,111\,111$$

Iar de aici decurge direct că:

$$12\,345\,679 \times 9 \times 2 = 222\,222\,222$$
$$12\,345\,679 \times 9 \times 3 = 333\,333\,333$$
$$12\,345\,679 \times 9 \times 4 = 444\,444\,444$$

SCARA NUMERICĂ

Este interesant ce se va întîmpla dacă numărul 111 111 111, cu care am avut de-a face mai sus, va fi înmulţit cu el însuşi?

Dacă ştiţi să desenaţi bine în imaginaţie rîndurile de cifre, atunci veţi reuşi să găsiţi rezultatul chiar fără să recurgeţi la calcule pe hîrtie. De fapt aici lucrurile se reduc numai la aşezarea corespunzătoare a produselor parţiale, pentru că înmulţirea se face tot timpul numai cu 1. O asemenea operaţie poate să prezinte greutăţi cel mult lui Mitrofanuşka al lui Fonvizin, care a stat pe gînduri la înmulţirea lui „unu cu unu". Iar adunarea produselor parţiale se reduce la o simplă numărătoare a unităţilor.[1] Iată rezultatul acestei înmulţiri unice în genul ei (la efectuarea căreia nu trebuie niciodată să recurgem la înmulţirea propriu-zisă):

```
      111111111
      111111111
     ----------
      111111111
     111111111
    111111111
   111111111
  111111111
 111111111
111111111
---------
12345678987654321
```

[1] După cum am mai explicat, în sistemul de numeraţie binar (vezi pag. 82) toate înmulţirile sînt de acest gen. Exemplul de mai sus ne convinge încă o dată de avantajele sistemului binar.

Cifrele rezultatului descresc simetric de la mijloc spre ambele capete.

Cititorii, pe care i-a obosit trecerea în revistă a curiozităţilor numerice, pot părăsi aici „galeria", trecînd la celelalte secţiuni, unde se arată scamatorii, şi sînt expuşi uriaşii şi piticii numerici; vreau să spun că ei pot întrerupe citirea acestui capitol, trecînd la capitolele următoare. Cei ce doresc să mai cunoască cîteva rarităţi din lumea numerelor, pot vizita împreună cu mine încă cîteva vitrine din vecinătate.

Curiozităţile numerice, despre care va fi vorba acum, necesită o întrevedere cu aşa-numitele fracţii periodice infinite. Pe cei care nu cunosc aceste fracţii îi rog să transforme, după metoda cunoscută, următoarele fracţii ordinare în fracţii zecimale:

$$\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{8}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \text{şi}\ \frac{1}{11}$$

Este uşor să ne convingem de faptul că primele două fracţii, la transformarea lor în fracţii zecimale, dau un număr de cifre finit: $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$. La transformarea celorlalte fracţii în fracţii zecimale se obţin şiruri infinite de cifre, care se repetă într-o anumită ordine:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots;\ \frac{1}{11} = 0{,}090909090\ldots$$

Aceste fracţii se numesc p e r i o d i c e , iar grupul de cifre care se repetă — p e r i o a d ă .

INELE MAGICE

Ce inele interesante sînt expuse în următoarea vitrină a galeriei noastre! În faţa noastră (fig. 37) se află trei inele plane, care se rotesc unul în altul.

Pe fiecare inel sînt scrise şase cifre în aceeaşi ordine, şi anume, ele formează numărul: 142 857. Inelele au

următoarea proprietate: oricum ar fi rotite, la adunarea a două numere scrise pe ele — începînd de la orice cifră în direcţia de rotire a acelor de ceasornic — obţinem în toate cazurile acelaşi număr de şase cifre (bineînţeles dacă rezultatul va fi un număr format din şase cifre), deplasat numai puţin! De exemplu, în poziţia reprezentată în figura alăturată obţinem la adunarea celor două inele exterioare:

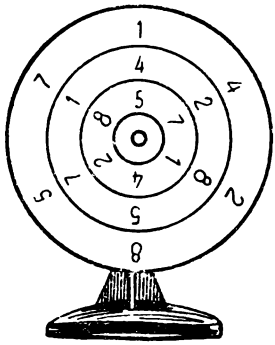


Fig. 37 — Inele numerice ce se rotesc.

$$\begin{array}{r} 142\,857 \\ +\ 428\,571 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

adică din nou aceeaşi serie de cifre: 142 857, doar că cifrele 5 şi 7 au trecut la început.

Dacă inelele sînt aşezate altfel unul faţă de celălalt, atunci avem următoarele cazuri:

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\ 571\,428 \\ \hline 857\,142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\,285 \\ +\ 142\,857 \\ \hline 857\,142 \end{array} \quad \text{etc.}$$

Excepţie face cazul cînd la rezultat se obţine 999 999

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\ 714\,285 \\ \hline 999\,999 \end{array}$$

(Cititorul va înţelege cauza altor abateri de la regula arătată mai sus, cînd va citi acest paragraf pînă la capăt).

Nu numai atît. Acelaşi şir de cifre, în aceeaşi succesiune, se obţine şi la s c ă d e r e a numerelor scrise pe inele.

Exemplu:

428 571	571 428	714 285
− 142 857	− 285 714	− 142 857
285 714	285 714	571 428

Excepție face cazul cînd coincid cifre de același fel; se înțelege că atunci diferența este egală cu zero.

Dar nici cu aceasta nu am terminat. Înmulțiți numărul 142 857 cu 2,3,4,5 sau cu 6. Veți obține un număr format din aceleași cifre însă permutate circular cu una sau mai multe cifre:

$$142\,857 \times 2 = 285\,714$$
$$142\,857 \times 3 = 428\,571$$
$$142\,857 \times 4 = 571\,428$$
$$142\,857 \times 5 = 714\,285$$
$$142\,857 \times 6 = 857\,142$$

Cărui fapt se datoresc toate aceste particularități misterioase ale numărului nostru?

Vom găsi calea spre rezolvare dacă vom continua puțin tabelul de mai sus și vom încerca să înmulțim numărul nostru cu 7: se va obține ca rezultat 999 999. Aceasta înseamnă că numărul 142 857 nu este altceva decît a șaptea parte din 999 999 și, prin urmare, fracția $\frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$. Într-adevăr, dacă veți transforma $\frac{1}{7}$ în fracție zecimală, obțineți:

$1 : 7 = 0{,}142\,857\ldots$ adică $1/7 = 0{,}(142\,857)$

10
30
20
60
40
50
1

Deci numărul de mai sus este perioada unei fracții periodice infinite, care se obține la transformarea fracției 1/7 în fracție zecimală. Acum înțelegem de ce la dublarea, triplarea etc. a acestui număr are loc doar

o mutare a unui grup de cifre în alt loc. Numai înmulţirea acestui număr cu doi îl face egal cu 2/7 şi, prin urmare, este echivalentă cu transformarea în fracţie zecimală a lui 2/7 şi nu a lui 1/7. Încercînd să transformaţi fracţia 2/7 în fracţie zecimală, veţi observa imediat că cifra 2 este unul din acele resturi pe care le-am obţinut şi la transformarea lui 1/7; desigur că trebuie să se repete din nou şirul de cifre ale cîtului, începînd însă cu o altă cifră; cu alte cuvinte trebuie să se obţină aceeaşi perioadă, dar numai cîteva cifre de la începutul ei se vor găsi la sfîrşit. Acelaşi lucru se va petrece şi la înmulţirea cu 3,4,5 şi 6, adică cu toate numerele obţinute în rest. La înmulţirea cu 7 trebuie să obţinem 1, sau — ceea ce este acelaşi lucru — 0,9999...

Rezultatele interesante obţinute prin a d u n a r e a şi s c ă d e r e a numerelor de pe inele îşi găsesc explicaţia în acelaşi fapt că 142 857 este perioada fracţiei egale cu 1/7. Într-adevăr, ce facem, propriu-zis, rotind inelul cu cîteva cifre? Noi mutăm grupul de cifre de la început la sfîrşit, adică, conform celor spuse mai sus, înmulţim numărul 142 857 cu 2,3, 4 etc. Prin urmare, toate operaţiile de adunare sau scădere a numerelor scrise pe inele se reduc la adunarea sau scăderea fracţiilor 1/7, 2/7, 3/7 etc. Desigur că, în rezultat, noi trebuie să obţinem cîteva şeptimi, adică din nou şirul de cifre 142 857, într-o altă permutare circulară. Face excepţie numai cazul cînd se adună fracţiile care dau în sumă 1 sau mai mult de 1.

Chiar aceste din urmă cazuri nu sînt complet deosebite; ele, ce e drept, nu dau un rezultat identic cu cele examinate, dar cu toate acestea asemănător. Să vedem ce trebuie să se întîmple dacă înmulţim respectiv cu un factor mai mare decît 7, adică cu 8, 9 etc. Pentru a înmulţi 142 857, de exemplu, cu 8 procedăm astfel: înmulţim întîi numărul cu 7 şi adăugăm apoi la produs (adică la 999 999) numărul nostru:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 = 999\,999 + 142\,857 = 1\,000\,000 - 1 + 142\,857 = 1\,000\,000 + (142\,857 - 1)$$

Rezultatul final — 1 142 856 — diferă față de deînmulțitul 142 857 numai prin faptul că înaintea lui mai avem un unu, iar ultima cifră este micșorată cu o unitate. După o regulă asemănătoare se obțin produsele lui 142 857 cu orice alt număr mai mare decît 7 după cum putem vedea imediat mai jos:

$$\begin{aligned}
142\,857 \times 8 &= (142\,857 \times 7) + \\
142\,857 \times 9 &= (142\,857 \times 7) + \\
142\,857 \times 10 &= (142\,857 \times 7) + \\
142\,857 \times 16 &= (142\,857 \times 7 \times 2) + \\
142\,857 \times 39 &= (142\,857 \times 7 \times 5) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\ 142\,857 &= 1\,142\,856 \\
+\ (142\,857 \times 2) &= 1\,285\,713 \\
+\ (142\,857 \times 3) &= 1\,428\,570 \\
+\ (142\,857 \times 2) &= 2\,285\,712 \\
+\ (142\,857 \times 4) &= 5\,571\,423
\end{aligned}$$

Aici regula generală este următoarea: la înmulțirea lui 142 857 cu orice înmulțitor trebuie să se înmulțească numai cu restul de la împărțirea înmulțitorului cu 7; în fața acestui produs se pune numărul care arată cîți de 7 sînt cuprinși în înmulțitor, același număr scăzîndu-se și din rezultat[1]. Presupunem că dorim să înmulțim 142 857 cu 88. Înmulțitorul 88, la împărțirea lui cu 7, dă cîtul 12 și rest 4. Prin urmare rezultatul înmulțirii este următorul:

$$12\,571\,428 - 12 = 12\,571\,416$$

Efectuînd înmulțirea 142 857 × 365 obținem (deoarece 365 la împărțirea lui cu 7 dă cîtul 52 și rest 1):

$$52\,142\,857 - 52 = 52\,142\,805$$

Însușindu-ne această regulă simplă și ținînd minte rezultatele înmulțirii numărului cu înmulțitorii de la 2 pînă la 6 (ceea ce nu este greu, pentru că trebuie să

[1] Dacă înmulțitorul este un multiplu de 7, atunci rezultatul este egal cu numărul 999 999 înmulțit cu numărul care arată de cîte ori 7 se cuprinde în înmulțitor; această înmulțire poate fi efectuată în minte. De exemplu:
142 857 × 28 = 999 999 × 4 = 4 000 000 — 4 = 3 999 996

ţinem minte numai cu ce cifră încep ele), puteţi să-i uimiţi pe cei da faţă înmulţind rapid numere formate din şase cifre. Iar pentru a reţine acest număr util în calcule, observăm că el a provenit de la 1/7 sau — ceea ce este acelaşi lucru — de la 2/14: să zicem că aţi aflat primele trei cifre din numărul nostru: 142. Celelalte trei se obţin prin scăderea acestora din 999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\,142\,857 \\ \hline 857 \end{array}$$

Noi am mai avut de-a face cu astfel de numere, şi anume, atunci cînd am făcut cunoştinţă cu proprietăţile numărului 999. Amintindu-ne de cele spuse la paragraful respectiv, ne vom da seama imediat că numărul 142 857 este, evident, rezultatul înmulţirii numărului 143 cu 999:

$$142\,857 = 143 \times 999$$

Însă $143 = 13 \times 11$. Ţinînd seama de observaţia făcută mai înainte cu privire la numărul 1 001, egal cu $7 \times 11 \times 13$, vom putea, fără să efectuăm vreo operaţie, să spunem ce rezultat se obţine prin înmulrea $142\,857 \times 7$:

$$142\,857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = \\ = 999 \times 1\,001 = 999\,999$$

(toate aceste transformări le putem face, desigur, în minte).

O FAMILIE FENOMENALĂ

Numărul 142 857 este membru al unei familii întregi de numere care posedă aceeaşi proprietate. Iată încă un număr de acest gen: 0 588 235 294 117 647 (0 din faţă este necesar). Dacă înmulţim numărul acesta de

exemplu cu 4, atunci vom obține același șir de cifre numai că primele patru cifre se vor afla la sfîrșit:

$$0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \times 4 = 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588$$

Așezînd cifrele care formează numărul pe cîteva inele mobile (fig. 38), ca și în cazul precedent, la adunarea numerelor de pe două inele vom obține un număr format din aceleași cifre permutate însă circular:

$$\begin{array}{r} 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ +\ 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ \hline 2\ 941\ 176\ 470\ 588\ 235 \end{array}$$

La așezarea pe inele numerele celor trei rînduri sînt, desigur, identice.

Scăzînd numerele de pe două inele obținem din nou același cerc de cifre:

$$\begin{array}{r} 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ -\ 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ \hline 1\ 764\ 705\ 882\ 352\ 941 \end{array}$$

În sfîrșit, acest număr, ca și cel examinat mai sus, este format din două jumătăți; cifrele din cea de-a doua jumătate completează cifrele din prima jumătate pînă la 9.

Vom căuta să găsim explicația unor asemenea particularități. Nu este greu să ne dăm seama în ce mod numărul acesta a devenit o rudă apropiată a numărului 142 857; 142 857 reprezintă perioada fracției periodice infinite egale cu 1/7, iar numărul nou este, probabil, perioada unei alte fracții periodice. Într-adevăr așa este, numărul lung de cifre nu este altceva decît perioada fracției periodice infinite care se obține prin transformarea în fracție zecimală a fracției 1/17:

$$1/17 = 0,\ (0588235294117647)$$

Iată de ce la înmulțirea acestui număr cu un înmulțitor de la 1 pînă la 16 se obține același șir de cifre, în care numai una sau cîteva din cifrele de la începutul numărului sînt trecute la sfîrșitul lui. Dimpotrivă, trecîndu-se una sau cîteva cifre de la începutul șirului

la sfîrşitul lui, mărim astfel numărul de cîteva ori (de la 1 pînă la 16 inclusiv). Adunînd două inele, rotite unul faţă de celălalt, noi efectuăm adunarea a două numere înmulţite — de exemplu, triplate sau înmulţite cu 10; desigur, trebuie să obţinem acelaşi inel de cifre, pentru că înmulţirea cu 3 + 10, adică cu 13, duce doar la o deplasare în grupul de cifre, deplasare care nu se observă la aşezarea circulară.

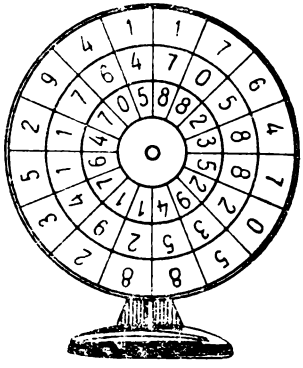


Fig. 38 — Încă un număr interesant.

La o anumită poziţie a inelelor se obţin însă sume care diferă puţin de şirul iniţial. Dacă, de exemplu, rotim inelul astfel încît să fim nevoiţi să adunăm un număr înmulţit cu 6 cu un număr înmulţit cu 15, atunci în sumă trebuie să obţinem un număr înmulţit cu 6 + 15 = 21. Acest produs se prezintă întrucîtva altfel decît produsul cu un factor mai mic decît 17. Într-adevăr, deoarece numărul nostru este perioada unei fracţii egale cu 1/17, el fiind înmulţit cu 17 trebuie să dea 17 de 9 (adică atîţia cîte cifre sînt în perioada fracţiei noastre periodice), sau 1 cu 17 zerouri minus 1. De aceea la înmulţirea cu 21, adică cu 4 + 17, trebuie să obţinem numărul nostru înmulţit cu 4, în faţa căruia stă un 1, iar din unităţi simple se scade 1. Dar numărul înmulţit cu 4 începe cu cifrele ce se obţin la transformarea în fracţie zecimală a fracţiei simple 4/17:

$$\begin{array}{r} 4:17 = 0{,}23\ldots \\ \hline 40 \\ \hline 60 \\ \hline 9 \end{array}$$

Ordinea celorlalte cifre se cunoaşte: 5294... Prin urmare, numărul respectiv înmulţit cu 21 va fi:

12 352 941 176 470 587

Tot atîta se obţine şi prin adunarea cercurilor de cifre, cînd ele sînt aşezate corespunzător. Un astfel de caz, bineînţeles, nu poate fi obţinut prin s c ă d e r e a inelelor numerice.

Există foarte multe numere asemenea celor două cu care am făcut cunoştinţă mai sus. Ele formează o familie întreagă, pentru că au o origine comună — transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale infinite. Însă nu fiecare perioadă a fracţiei zecimale are proprietatea interesantă de a da la înmulţire o permutare circulară a cifrelor. Fără a mai aprofunda teoria, menţionăm că aceasta are loc numai pentru fracţiile pentru care numărul de cifre al perioadei este cu o unitate mai mică decît numitorul fracţiei ordinare corespunzătoare. Astfel, de exemplu:

1/7 dă la perioadă 6 cifre
1/17 „ „ „ 16 „
1/19 „ „ „ 18 „
1/23 „ „ „ 22 „
1/29 „ „ „ 28 „

Dacă proprietatea indicată mai sus (în ce priveşte numărul de cifre ale perioadei) nu este respectată, atunci perioada respectivă dă un număr care nu face parte din familia de numere de care ne ocupăm în acest paragraf. De exemplu, 1/13 dă o fracţie zecimală cu 6 (şi nu cu 12) cifre în perioadă:

$$1/13 = 0{,}076923$$

Înmulţind cu 2 obţinem un număr cu totul diferit:

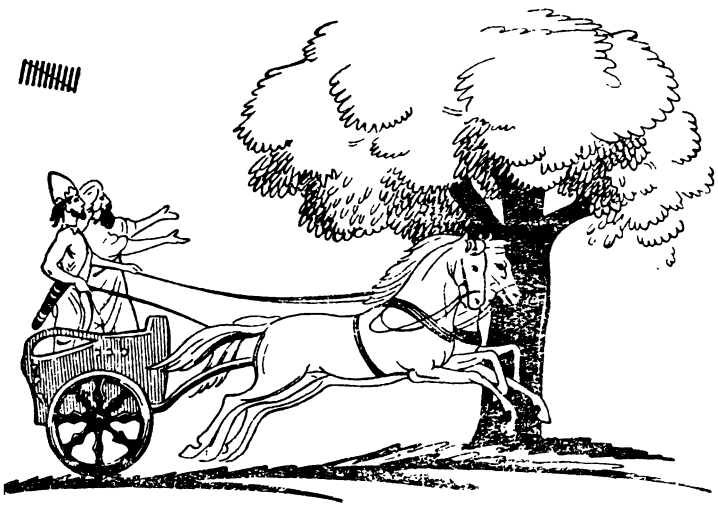
$$2/13 = 0{,}153846$$

De ce? Pentru că printre resturile împărţirii 1 : 13 nu există numărul 2. Resturi diferite au fost atîtea cîte cifre sînt în perioadă, adică 6; înmulţitori diferiţi pentru fracţia 1/13 avem 12; prin urmare, nu toţi înmulţitorii vor exista printre resturi, ci numai 6. Aceştia sînt următorii: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Înmulţirea cu aceste 6 numere dă o permutare circulară a cifrelor

(076 923 × 3 = 230 769) iar înmulțirea, cu celelalte nu. Iată de ce fracția 1/13 dă un număr care este util numai în parte pentru „inelul magic".

CURIOZITĂȚI ARITMETICE

$$100 = \begin{cases} 91 + \dfrac{5823}{647} \\ 94 + \dfrac{1578}{263} \\ 96 + \dfrac{1428}{357} \end{cases}$$



CAPITOLUL VI

SCAMATORII FĂRĂ ÎNŞELĂTORIE

ARTA CALCULATORULUI INDIAN

Scamatoriile aritmetice nu caută să amăgească, să adoarmă atenţia spectatorului. Pentru efectuarea scamatoriei aritmetice nu este necesară nici abilitatea extraordinară a mîinilor, nici rapiditatea uimitoare a mişcărilor, nici talente artistice sau deprinderi care să ceară antrenamente îndelungate. Secretul scamatoriei aritmetice constă în studiul amănunţit şi în folosirea proprietăţilor interesante ale numerelor, cunoscînd particularităţile lor. Cine află dezlegarea unei astfel de scamatorii o va găsi simplă şi clară; pentru cel care nu cunoaşte însă aritmetica, chiar şi operaţia cea mai obişnuită apare ca un fel de scamatorie.

A existat o vreme cînd priceperea de a efectua operaţii aritmetice obişnuite cu numere mari, operaţii cunoscute astăzi oricărui şcolar, era o artă cunoscută numai unor oameni care păreau că deţin aptitudini deosebite, supranaturale. În povestirea veche indiană „Nal şi Damaianti" găsim ecoul unei astfel de concepţii. Nal, care ştia foarte bine să conducă caii, îl plimba o dată pe calculatorul Ritupern pe lîngă un copac foarte ramificat — Vibitaka.

„Ascultă, spuse el. Aici pe pămînt nimeni nu cunoaşte totul: în arta de a conduce caii tu eşti primul; în schimb eu cunosc arta calculului..."

Şi pentru a-şi demonstra arta, calculatorul numără într-o clipă frunzele de pe Vibitaka stufoasă. Uimit, Nal îl rugă pe Ritupern să-i dezvăluie taina artei sale şi acesta se învoi.

„...Îndată ce şi-a rostit Ritupern cuvîntul său, lui Nal i s-au deschis ochii şi el a putut număra pe loc toate ramurile fructele şi frunzele Vibitakăi"...

Secretul consta în aceea că numărătoarea directă a frunzelor care necesita timp mult şi răbdare, era înlocuită prin numărătoarea frunzelor unei singure ramuri; rezultatul se obţinea prin înmulţirea acestui număr cu numărul de rămurele ale fiecărei crengi şi apoi cu numărul de crengi ale copacului (presupunînd că toate crengile conţineau acelaşi număr de rămurele, iar rămurelele acelaşi număr de frunze).

Dezlegarea celor mai multe scamatorii aritmetice este tot atît de simplă ca şi secretul lui Ritupern. Trebuie să aflăm doar în ce constă secretul scamatoriei şi vom cunoaşte imediat modul ei de efectuare. La baza fiecărei scamatorii aritmetice stă o anumită particularitate interesantă a numerelor şi, de aceea, cunoaşterea lor este distractivă şi instructivă în acelaşi timp.

FĂRĂ A DESCHIDE PUNGILE

Scamatorul pune pe masă o grămadă de monezi care însumează 3 ruble şi vă propune să rezolvaţi următoarea problemă: să repartizaţi banii în 9 pungi, astfel încît

să puteţi plăti orice sumă pînă la trei ruble fără a deschide pungile.

Acest lucru poate să pară irealizabil. Să nu credeţi însă că scamatorul v-a întins o cursă, folosind un joc de cuvinte sau dînd acestor cuvinte o anumită răstălmăcire. Iată, scamatorul se apucă singur de treabă. Aşezînd monezile în pungi şi legînd de fiecare pungă cîte un bileţel pe care este notată suma ce-o cuprinde (fig. 39), el vă propune să numiţi orice sumă care să nu depăşească 3 ruble.

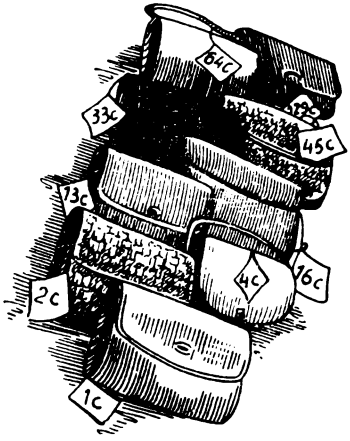


Fig. 39 — Scamatoria cu 9 portmonee

Numiţi prima sumă ce vă vine în minte: să zicem 2 ruble şi 69 copeici.

Fără să stea pe gînduri scamatorul alege şi vă întinde 4 pungi. Le deschideţi şi găsiţi:

în prima	64 c.
în a doua	45 c.
în a treia	1 r. 28 c.
în a patra	32 c.
Total:	2 r. 69 c.

Sînteţi gata să-l învinuiţi că a înlocuit cu abilitate pungile şi cereţi să se repete scamatoria. El vă întinde pungile şi atunci numiţi o nouă sumă — de exemplu 1 rublă, sau 7 copeici, sau 2 ruble 93 copeici; el vă arată imediat care din pungile ce le aveţi în faţă reprezintă suma numită de dumneavoastră. Şi anume:

pentru 1 rublă — 6 pungi (32 copeici, 1 copeică, 45 copeici, 16 copeici, 2 copeici, 4 copeici);

pentru 7 copeici — 3 pungi (1 copeică, 2 copeici, 4 copeici);

pentru 2 ruble 93 copeici — 7 pungi (1 rublă 28 copeici, 32 copeici, 8 copeici, 45 copeici, 64 copeici, 16 copeici).

La dorinţa scamatorului pungile sînt gata totdeauna să formeze orice sumă numită (pînă la 3 ruble).

Cum se explică acest lucru?

Secretul constă în repartizarea corespunzătoare a monedelor: 1 copeică, 2 copeici, 4 copeici, 8 copeici, 16 copeici, 32 copeici, 64 copeici, 128 copeici şi, în sfîrşit, în ultima pungă — restul banilor adică:

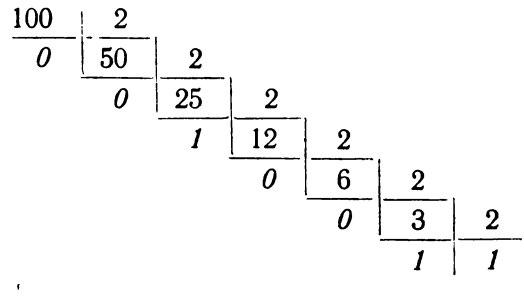
$$300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = \\ = 300 - 255 = 45 \text{ copeici}$$

Din primele 8 pungi putem forma uşor orice sumă de la 1 pînă la 255 copeici; dacă se dă însă o sumă mai mare, atunci se foloseşte şi ultima pungă cu 45 de copeici, iar diferenţa se completează din primele 8 pungi.

Puteţi verifica utilitatea unei astfel de grupări a numerelor făcînd oricîte probe şi vă veţi convinge că din ele se poate întocmi, într-adevăr, orice număr care nu depăşeşte trei sute. Vă interesează probabil şi cauza pentru care şirul de numere 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 etc. are o proprietate atît de interesantă. Acest lucru nu este greu de înţeles dacă ne amintim că numerele din şirul nostru reprezintă puteri ale lui 2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 etc[1]. şi, prin urmare, pot fi privite ca nişte categorii ale sistemului de numeraţie binar. Deoarece fiecare număr poate fi scris în sistemul binar, înseamnă că orice număr poate fi întocmit din suma puterilor lui 2, adică din numere ale seriei 1, 2, 4, 8, 16 etc. Atunci cînd alegeţi pungile pentru a întocmi din conţinutul lor numărul dat, exprimaţi de fapt numărul dat în sistemul de nume-

[1] Cei care au învăţat algebră ştiu că numărul 1 poate fi considerat ca 2 la puterea zero.

rație binar. De exemplu, numărul 100 poate fi reprezentat cu ușurință în sistemul binar astfel:



$100 = 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0$

$64\ \ 32\ \ (16)\ \ (8)\ \ 4\ \ (2)\ \ (1)$

$100 = 64 + 32 + 4$

Amintim că în sistemul binar pe locul întîi din dreapta stau unitățile simple, pe locul al doilea unitățile de ordinul II, adică formate din 2 unități simple, pe locul al treilea — unități de ordinul III formate din 2^2 unități simple, pe locul al patrulea — unități de ordinul IV, formate din 2^3 adică 8 unități simple și așa mai departe.

SE GHICEȘTE NUMĂRUL CHIBRITURILOR

De proprietățile sistemului binar ne putem folosi și pentru scamatoria următoare. Propuneți unei persoane să pună pe masă o cutie de chibrituri nu tocmai plină; iar alături, în stînga ei, să așeze 7 bucățele de hîrtie de formă dreptunghiulară. Rugați apoi persoana să facă în lipsa dumneavoastră următoarele: lăsînd în cutie o jumătate din numărul chibriturilor, să pună cealaltă jumătate pe hîrtia cea mai apropiată; dacă numărul chibriturilor este impar, atunci chibritul de prisos să-l așeze alături de hîrtie. Chibriturile de pe hîrtie (în afara celui de alături) trebuie împărțite în două părți egale: jumătate în cutie, iar cealaltă jumă-

tate se trece pe hîrtia de-alături; cînd numărul este impar, chibritul rămas se pune alături de cea de-a doua hîrtie. Mai departe se procedează în acelaşi fel, punînd de fiecare dată jumătate de chibrituri înapoi în cutie,

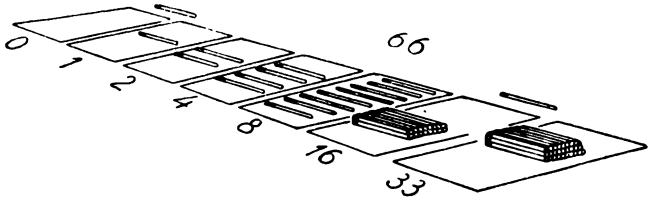


Fig. 40 — Aflarea numărului de chibrite. Se pot urmări operaţiile succesive efectuate de cel care rezolvă problema.

iar cealaltă jumătate mutînd-o pe hîrtia următoare; în cazul cînd numerele sînt impare, să nu se uite să se pună chibritul de prisos alături de hîrtie. În cele din urmă toate chibriturile, afară de cele rămase alături de bucăţelele de hîrtie, sînt introduse în cutie (fig. 40 şi 41).

După ce s-a făcut această operaţie vă înapoiaţi în cameră, şi, aruncînd o privire asupra bucăţelelor de hîrtie goale, spuneţi numărul de chibrituri care era în cutie.

Cum poate fi ghicit după hîrtioarele goale şi după cîteva chibrituri izolate, aşezate lîngă ele, numărul iniţial al chibriturilor din cutie?

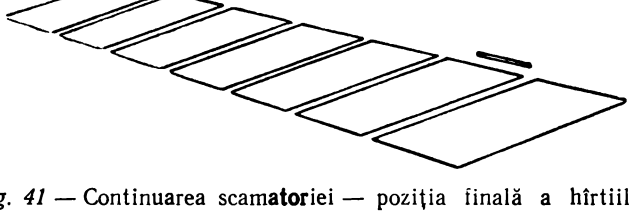


Fig. 41 — Continuarea scamatoriei — poziţia finală a hîrtiilor.

În cazul de faţă bucăţelele de hîrtie „goale" sînt foarte edificatoare; cu ajutorul lor şi al chibriturilor izolate se poate citi numărul căutat, pentru că el este scris pe masă în sistemul de numeraţie binar. Expli-

căm aceasta cu ajutorul unui exemplu. Presupunem că în cutie au fost 66 de chibrituri. Operaţiile succesive, precum şi aspectul final al hîrtiilor, sînt date în schemele din figurile 40 şi 41.

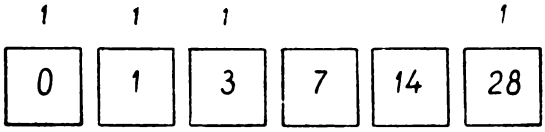


Fig. 42 — Un alt caz. Se poate observa prima operaţie a scamatoriei.

Nu este greu să ne dăm seama că operaţiile cu chibrituri sînt de fapt cele pe care le-am fi făcut dacă vream să exprimăm numărul chibriturilor din cutie în sistemul de numeraţie binar; schema finală va reprezenta direct acest număr în sistem binar, în cazul cînd hîrtioarele goale vor fi considerate drept zerouri, iar hîrtioarele marcate cu chibrituri drept unităţi. Citind schema de la stînga spre dreapta obţinem:

1 0 0 0 0 1 0
64 (32) (16) (8) (4) 2 (1)

iar în sistemul zecimal: $64 + 2 = 66$

Dacă am fi avut 57 de chibrituri, obţineam alte scheme, identice cu cele indicate în figurile 42 şi 43.

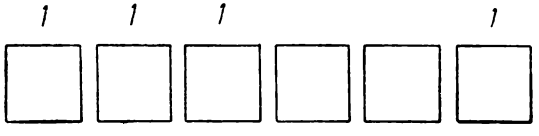


Fig. 43 — Sfîrşitul scamatoriei.

Numărul căutat, scris în sistemul binar, este:

1 1 1 0 0 1
32 16 8 (4) (2) 1

iar în sistem zecimal: $32 + 16 + 8 + 1 = 57$

Cea de-a treia variantă a aceleiaşi scamatorii reprezintă o metodă originală de ghicire a unui număr cu ajutorul chibriturilor. Cel care şi-a fixat în gînd un

Fig. 44 — Aflarea numărului ales cu ajutorul chibriturilor: ce face cel care propune problema.

număr trebuie să-l împartă, tot în gînd, în două, jumătatea obţinută din nou în două etc. (de la numărul impar se va scădea o unitate); la fiecare împărţire va pune în faţa sa, pe masă, un chibrit aşezat orizontal dacă numărul împărţit este par, şi vertical dacă acest număr este impar. La sfîrşitul operaţiei se obţine o figură de genul celei reprezentate alăturat.

Dumneavoastră priviţi această figură şi numiţi fără greş numărul ales: 137.

Cum îl aflaţi?

Metoda devine clară dacă în exemplul ales (137) se va nota succesiv, lîngă fiecare chibrit, acel număr a cărui împărţire a fost notată cu chibritul respectiv (fig. 45).

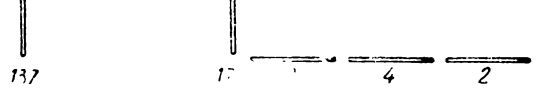


Fig. 45 — Secretul scamatoriei: ce face cel care rezolvă problema.

Deoarece ultimul chibrit indică în toate cazurile numărul 1, pornind de la el spre împărţirile precedente, nu este greu să ajungem la numărul ales iniţial. De exemplu, cu ajutorul figurii 46 puteţi afla că s-a ales iniţial numărul 664. Într-adevăr, efectuînd succesiv

înmulțirea cu 2 (începînd de la capăt) și adăugînd acolo unde este necesar 1, obținem numărul ales (fig. 47).

În felul acesta, folosind chibriturile urmăriți gîndul celui care a efectuat operația și restabiliți întregul lanț al calculelor.

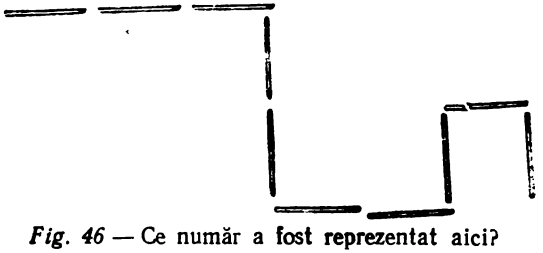


Fig. 46 — Ce număr a fost reprezentat aici?

Același rezultat se poate obține și altfel, dîndu-ne seama de faptul că chibritul orizontal trebuie să corespundă, în sistemul binar, zeroului (împărțirea cu 2 fără rest), iar cel vertical cu unitatea.

Astfel, în primul exemplu avem (citind de la dreapta spre stînga) numărul:

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

sau în sistem zecimal:

$$128 + 8 + 1 = 137$$

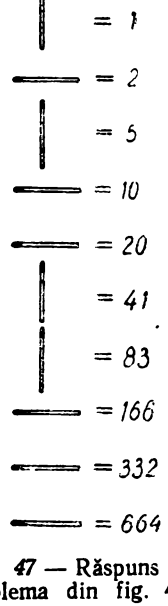


Fig. 47 — Răspuns la problema din fig. 46.

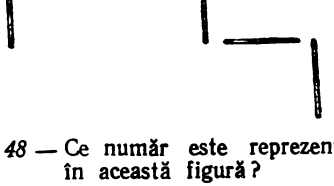


Fig. 48 — Ce număr este reprezentat în această figură?

În cel de-al doilea exemplu numărul ales se va reprezenta, în sistemul binar, în felul următor:

1 0 1 0 0 1 1 0 0 0
512 (256) 128 (64) (32) 16 8 (4) (2) (1)

sau în sistemul zecimal:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664$$

Acum încercați să aflați ce număr reprezintă schema din figura 48.

Acest lucru este relativ simplu. Într-adevăr, numărului „10010101", în sistem binar, îi corespunde în sistemul zecimal:

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149$$

Menționăm că unitatea obținută la ultima împărțire trebuie însemnată cu un chibrit v e r t i c a l.

GARNITURA DE GREUTĂȚI IDEALĂ PENTRU CÎNTAR

Probabil că unii cititori și-au și pus întrebarea: de ce oare pentru efectuarea experiențelor descrise mai sus folosim tocmai sistemul b i n a r? Doar fiecare număr poate fi reprezentat în orice sistem, inclusiv cel zecimal. Cum se explică preferința acordată aici sistemului binar?

Ea se explică prin faptul că în acest sistem în afară de zero se folosește o singură cifră — unitatea, și prin urmare numărul este constituit din diferitele puteri ale lui 2, luate o singură dată. Dacă în scamatoria cu pungile am fi împărțit banii, de exemplu, după sistemul cincinal, atunci am fi putut forma orice sumă, fără a deschide pungile, numai cînd fiecare pungă s-ar repeta de cel puțin patru ori (pentru că în sistemul cincinal afară de zero se mai folosesc patru cifre).

De altfel, sînt cazuri cînd este mai comod să folosim sistemul cu baza 3 și nu cel binar. Printre astfel de cazuri se numără cunoscuta „problemă a greutăților", care poate face subiectul unei scamatorii aritmetice.

Să zicem că vi s-a propus să găsiți o garnitură de patru greutăți, cu ajutorul cărora să puteți cîntări orice număr de kilograme de la 1 pînă la 40. Sistemul binar vă ajută la aflarea garniturii următoare:

1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg,

cu care pot fi cîntărite toate greutățile de la 1 pînă la 31 de kg. Dar, evident, aceasta nu satisface condițiile cerute nici cu privire la numărul greutăților, nici în ce privește greutatea maximă (sînt 31 kg în loc de 40). Pe de altă parte, dumneavoastră nu ați folosit aici posibilitatea de a așeza greutățile numai pe un singur taler al cîntarului, ci pe ambele talere, adică de a utiliza atît suma greutăților, cît și diferența lor. Această posibilitate permite așa de multe combinații, încît vă puteți pierde în căutări fără a alege un anumit sistem.

Desigur, dacă nu găsiți calea cea justă, veți fi ispitiți să vă îndoiți chiar de posibilitatea de rezolvare a acestei probleme.

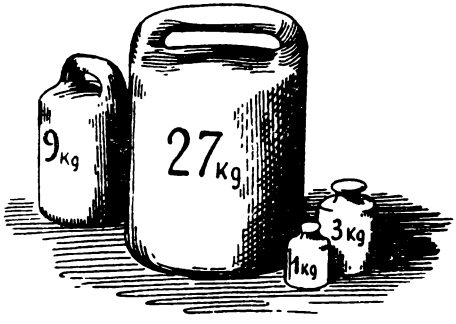


Fig. 49 — Cu ajutorul acestor patru greutăți se poate cîntări orice obiect de la 1 kg pînă la 40 kg.

O persoană inițiată alege însă cu ușurință aproape uimitoare următoarele patru greutăți (fig. 49):

1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg.

Orice număr întreg de kg, pînă la 40 kg, poate fi cîntărit cu aceste greutăți, punîndu-le cînd pe un taler,

cînd pe ambele talere ale cîntarului (vezi tabelul de la pag. 131).

Nu dăm exemple, pentru că oricine se poate convinge de utilitatea acestei garnituri de greutăţi în rezolvarea problemei noastre. Să ne oprim mai bine asupra întrebării: de ce oare acest şir are proprietatea enunţată? Cititorii au observat probabil că numerele de mai sus constituie şirul de puteri[1] ale numărului 3:

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3$$

Înseamnă că aici ne folosim de sistemul de numeraţie cu baza 3. Greutăţile sînt cifrele acestui sistem de numeraţie. Dar cum să-l utilizăm, dacă greutatea cerută se obţine sub forma d i f e r e n ţ e i a două greutăţi? Şi cum să se evite necesitatea de dublare a greutăţilor (doar în sistemul de numeraţie cu baza 3, afară de zero, se folosesc două cifre: 1 şi 2)?

Şi una, şi cealaltă se realizează prin introducerea cifrelor „negative". Aceasta se reduce la folosirea lui 3 — 1 în locul cifrei 2, adică a unităţii de ordin superior din care se s c a d e o unitate de ordin inferior. De exemplu, în sistemul de numeraţie cu baza 3 astfel transformat, numărul 2 nu se notează cu cifra 2, ci cu $1\bar{1}$, unde semnul — deasupra cifrei unităţilor arată că această unitate se scade. De asemenea, numărul 5 nu se va reprezenta prin 12, ci cu $1\bar{1}\bar{1}$ (adică 9—3 — 1 = 5).

Acum este clar că dacă orice număr poate fi reprezentat în sistemul de numeraţie cu baza 3 cu ajutorul zeroului (adică a semnului care indică lipsa numărului) şi a unei singure cifre, şi anume a unităţii care se adaugă sau se scade, atunci din numerele 1, 3, 9, 27 se pot forma, adunîndu-le sau scăzîndu-le, toate numerele de la 1 la 40. Adunarea corespunde, la cîntărire, cazului cînd toate greutăţile se aşază pe acelaşi taler, iar scăderea — situaţiei cînd o parte din greutăţi sînt pe talerul cu marfă şi, prin urmare, greutatea lor se

[1] Unitatea poate fi privită ca puterea zero a lui 3 (în general ca puterea zero a oricărui număr).

Greutatea	Talerul drept	Talerul stîng	Greutatea	Talerul drept	Talerul stîng
1	1	0	21	27+3	9
2	3	1	22	27+3+1	9
3	3	0	23	27	3+1
4	3+1	0	24	27	3
5	9	3+1	25	27+1	3
6	9	3	26	27	1
7	9+1	3	27	27	0
8	9	1	28	27+1	0
9	9	0	29	27+3	1
10	9+1	0	30	27+3	0
11	9+3	1	31	27+3+1	0
12	9+3	0	32	27+9	3+1
13	9+3+1	0	33	27+9	3
14	27	9+3+1	34	27+9+1	3
15	27	9+3	35	27+9	1
16	27+1	9+3	36	27+9	0
17	27	9+1	37	27+9+1	0
18	27	9	38	27+9+3	1
19	27+1	9	39	27+9+3	0
20	27+3	9+1	40	27+9+3+1	0

s c a d e din celelalte greutăți de măsură. Zeroul corespunde l i p s e i de greutate.

După cum se știe, acest sistem nu se folosește în practică. În toate țările lumii în care este introdus sistemul metric de măsură se folosește garnitura de 1, 2, 2, 5 unități și nu de 1, 3, 9, 27, deși cu ajutorul celor dintîi se pot cîntări mărfuri care nu depășesc 10

unități, iar cu ajutorul celorlalte — pînă la 40. Garnitura de 1, 3, 9, 27 nu a fost folosită nici înainte de introducerea sistemului metric. Care este oare cauza renunțării în practică la această garnitură de greutăți care ni se pare atît de perfectă?

Cauza constă în aceea că garnitura ideală este comodă numai pe hîrtie. În practică însă acest sistem de cîntărire este foarte greoi. Dacă ar trebui să cîntărim numai numărul dat de unități — de exemplu, 400 g de unt sau 2 500 g zahăr — atunci sistemul de greutăți de 100, 300, 900, 2 700 ar fi putut folosi în practică (deși chiar în aceste cazuri ar fi trebuit să alegem mult timp combinația corespunzătoare). Dar atunci cînd sîntem nevoiți să determinăm cît cîntărește marfa respectivă, această garnitură este foarte incomodă: pentru a adăuga la greutățile așezate în taler o singură unitate, adesea ar trebui să înlocuim total combinația precedentă cu o altă combinație nouă. În aceste condiții cîntărirea se face foarte încet și este foarte obositoare. Nu oricine își va da ușor seama, de exemplu, că o greutate de 19 kg se va obține dacă pe un taler se așază greutățile de 27 și 1 kg, iar pe celălalt 9 kg; că greutatea de 20 kg se determină cînd pe un taler așezăm greutățile de 27 și 3 kg, iar pe celălalt 9 kg și 1 kg. La fiecare cîntărire am fi nevoiți să rezolvăm asemenea probleme. Garnitura de greutăți de 1, 2, 2, 5 nu prezintă astfel de neajunsuri.

AFLĂM SUMA UNOR NUMERE NESCRISE

Unul din „numerele" cele mai uimitoare, efectuate de fenomenalul calculator sovietic R. S. Arrago, este adunarea fulgerătoare — dintr-o singură privire — a unei întregi coloane de numere formate din mai multe cifre.

Dar ce putem spune despre o persoană care scrie suma chiar înainte de a i se dicta toți termenii adunării?

Este vorba, desigur, de o scamatorie care se desfășoară în felul următor: Persoana care ghicește nume-

rele vă propune să scrieți la alegere un număr oarecare format din mai multe cifre. Aruncînd o privire asupra acestui prim termen al adunării, cel care ghicește scrie pe o hîrtie suma întregii coloane de termeni ce urmează și vă înmînează această hîrtie spre păstrare. Vă roagă (el sau o altă persoană din cele prezente) să mai scrieți un termen oarecare. Iar apoi scrie repede un al treilea termen al adunării. Dumneavoastră adunați cei trei termeni și obțineți cu exactitate rezultatul scris în prealabil pe hîrtia ce o aveți în păstrare.

Dacă, de exemplu, ați scris pentru început numărul 83 267, atunci cine ghicește scrie suma 183 266. Apoi scrieți, să zicem, 27 935, iar ghicitorul adaugă cel de-al treilea termen — 72 064:

I	.....dumneavoastră	83 267
III	.....dumneavoastră	27 935
IV	.....cel care ghicește	72 064
II	.....suma:	183 266

Se obține exact suma prescrisă, deși cel ce ghicește numărul nu putea ști care va fi al doilea termen al adunării. De asemenea se poate prezice suma a 5 sau 7 termeni, însă atunci însuși cel care ghicește scrie doi sau trei dintre aceștia. Aici nu poate fi nici o bănuială că hîrtia cu rezultatul a fost înlocuită, pentru că pînă în ultima clipă ea este păstrată în buzunarul dumneavoastră. Este evident că ghicitorul recurge la o proprietate anumită a numerelor, pe care cei de față nu o cunosc. Care anume?

Aici se folosește faptul că prin adăugarea la un număr, să zicem din cinci cifre, a unui număr format din 5 de 9 (99 999), primul crește cu 100 000 — 1, adică în fața lui apare un 1, iar ultima cifră se micșorează cu 1. De exemplu:

$$\begin{array}{r} 83\,267 \\ +\ 99\,999 \\ \hline 183\,266 \end{array}$$

Această sumă, adică suma dintre numărul scris de dumneavoastră și 99 999, este înregistrată pe hîrtie ca

viitorul rezultat al adunării. Iar pentru a obține acest rezultat, cel care ghicește, văzînd al doilea termen dat de dumneavoastră, își alege un al treilea termen, astfel încît împreună cu al doilea să formeze numărul 99 999, adică scade fiecare cifră a celui de-al doilea termen din 9. Aceste operații le puteți urmări în exemplul precedent, precum și în următoarele două exemple:

I	.....dumneavoastră	379 264
III	.....dumneavoastră	4 873
IV	.....cel care ghicește	995 126
II	.....suma	1 379 263
I	..... .dumneavoastră	9 035
III	.....dumneavoastră	5 669
IV	.....cel care ghicește	4 330
II	.....suma	19 034

Bineînțeles că-l veți pune în încurcătură pe cel care ghicește dacă al doilea termen ales va avea mai multe cifre decît primul; el nu va putea scrie un termen care să micșoreze al doilea număr pentru a justifica rezultatul prea mic pe care l-a prezis. De aceea, trebuie să fim destul de prevăzători și să limităm libertatea de alegere, punînd dinainte această condiție.

Scamatoria este mai de efect dacă la alegerea termenilor adunării participă cîteva persoane. După ce s-a scris primul termen, de exemplu 437 692, cel care ghicește prezice deja suma tuturor celor 5 numere, scriind 2 437 690 (aici se vor adăuga de două ori cîte 999 999, adică 200 000 — 2). Cele ce urmează decurg ca în schema:

I	.....dumneavoastră ați scris:	437 692
III	.....altul a scris:	822 541
V	.....al treilea a scris:	263 009
IV	.....cel care ghicește a adăugat:	177 458
VI	..... „ „ „ „ „	736 990
II	.....s-a prezis:	2 437 690

Încă un exemplu:

I	.....dumneavoastră aţi scris:	7 400
III	.....altul a scris:	4 732
V	.....al treilea a scris:	9 000
IV	..... cel care ghiceşte a adăugat:	5 267
VI	..... „ „ „ „ „	999
II	.....s-a prezis:	27 398

Cred că nu va fi lipsit de interes pentru cititor să facă cunoştinţă cu descrierea aceleiaşi scamatorii de către scriitorul sovietic Şişkov, în romanul său „Pelerinii".

„Ivan Petrovici a rupt din carneţel o foiţă, a întins-o băieţaşului, şi a întrebat:

— Ai creion? Scrie orice număr.

Băieţelul a scris. Ivan Petrovici aruncă o privire asupra acestui număr, scrise pe o altă bucăţică de hîrtie un număr oarecare, apoi ascunse hîrtia în paie şi o acoperi cu o pălărie.

— Scrie sub el altul. Ai scris? Acum voi scrie şi eu unul. Acum adună cele trei numere. Numai fii atent, nu greşi.

După două minute era gata răspunsul. Inginerul Voşkin (porecla băiatului) i-a arătat calculele făcute:

$$\begin{array}{r} 46\,853 \\ +\ 21\,398 \\ 78\,601 \\ \hline 146\,852 \end{array}$$

— O sută patruzeci şi şase de mii opt sute cincizeci şi doi, Ivan Petrovici.

— Cam mult timp numeri. Iar răspunsul meu —iată-l. Eu îl cunoşteam atunci cînd tu ai scris numai primul număr. Ia-l de sub pălărie.

Băiatul a apucat hîrtia. Acolo scria: 146 852".

În roman scamatoria rămîne fără comentarii. Dumneavoastră însă acum cunoaşteţi care este explicaţia sa aritmetică.

În anul 1916, în toiul războiului imperialist, unele ziare din Elveţia neutră se ocupau cu „ghicitul" aritmetic în legătură cu . . . soarta viitoare a împăraţilor Germaniei şi Austriei. „Prorocii" adunau următoarele coloane de numere:

Pentru Wilhelm al II-lea:

anul naşterii	1859
anul urcării pe tron	1888
numărul anilor domniei	28
vîrsta	57
suma:	3 832

Pentru Franz Iosef:

anul naşterii	1830
anul urcării pe tron	1848
numărul anilor domniei	68
vîrsta	86
suma:	3 832

În această coincidenţă a sumelor „prorocii" vedeau un semn rău pentru persoanele încoronate şi, deoarece fiecare din sume reprezentau dublul lui 1916, ambilor împăraţi li se prezicea pieirea tocmai în acest an.

Din punct de vedere matematic, această coincidenţă a rezultatelor nu era ceva neaşteptat. Este suficient să schimbăm doar puţin ordinea termenilor adunării şi vom înţelege imediat de ce rezultatul reprezintă un număr de două ori mai mare decît 1916. Într-adevăr să aşezăm termenii în modul următor:

anul naşterii,
vîrsta,
anul urcării pe tron,
numărul anilor domniei.

Ce se întîmplă dacă la anul naşterii se adaugă vîrsta? Bineînţeles că se obţine anul în care se face calculul.

Tot astfel, dacă la anul urcării pe tron se adaugă numărul anilor de domnie rezultă, din nou, anul în care se efectuează calculul. Şi atunci rezultatul obţinut prin adunarea celor patru termeni nu poate fi decît dublul anului în care s-a efectuat calculul. Este evident deci că soarta împăraţilor nu depindea de loc de o asemenea aritmetică...

Cum nu toţi cunosc cele spuse mai sus, le putem folosi pentru o scamatorie aritmetică nostimă. Propuneţi-i cuiva să scrie, fără să vedeţi, patru numere:

anul naşterii,
anul intrării în şcoală (în serviciu etc.),
vîrsta,
numărul anilor de şcoală (de serviciu).

Anunţaţi că veţi ghici suma acestor numere, deşi nu cunoaşteţi nici unul din ele. Pentru aceasta dublaţi anul în care se face scamatoria şi spuneţi rezultatul. Dacă de exemplu, scamatoria este făcută în anul 1962, atunci suma va fi 3 924.

Pentru a avea posibilitatea de a repeta scamatoria de cîteva ori, fără a dezvălui secretul, îi siliţi pe interlocutorii dumneavoastră să facă cu suma pe care o obţin cîteva operaţii aritmetice, mascînd în felul acesta metoda folosită.

ÎMPARŢIREA INSTANTANEE

Din numeroasele variante ale scamatoriilor de acest gen vom descrie una bazată pe proprietatea factorului format numai din 9, pe care o cunoşteam deja; cînd se înmulţeşte cu acesta un număr care conţine tot atîtea cifre, atunci se obţine un rezultat format din două jumătăţi: prima este numărul înmulţit micşorat cu o unitate, iar a doua jumătate este rezultatul obţinut prin scăderea primei jumătăţi din înmulţitor.

De exemplu, $247 \times 999 = 246\,753$;

$1\,372 \times 9\,999 = 13\,718\,628$ etc. Cauza poate fi aflată din rîndul următor:

$$247 \times 999 = 247 \times (1\,000 - 1) = 247\,000 - 247 = 246\,999 - 246$$

Folosind această proprietate, propuneți unui grup de tovarăși să efectueze împărțirea unor numere formate din mai multe cifre: unuia — 68 933 106 : 6 894, altuia — 8 765 112 348 : 99 999, celui de-al treilea — 543 456 : 544, celui de-al patrulea — 12 948 705 : 1 295 etc. Declarați că-i veți întrece pe toți în rezolvarea acelorași probleme. Și, înainte ca ei să se apuce de lucru, înmînați fiecăruia un bilețel pe care ați notat rezultatul împărțirii efectuate: celui dintîi — 9 999, pentru al doilea — 87 652, al treilea — 999, iar celui de-al patrulea — 9 999.

După modelul de mai sus puteți găsi singuri un șir de alte mijloace de a-i uimi pe cei neinițiați cu metoda de efectuare rapidă a împărțirilor; pentru aceasta folosiți cîteva proprietăți ale numerelor despre care s-a vorbit în capitolul „Galeria curiozităților numerice" (vezi Cap. V).

CIFRA PREFERATĂ

Rugați pe cineva să vă spună cifra lui preferată. Admitem că v-a fost numită cifra 6.

— Uimitor! — exclamați dumneavoastră. Aceasta este cifra cea mai minunată.

— Dar prin ce este ea minunată? întreabă interlocutorul cu interes.

— Iată: înmulțiți cifra preferată cu numărul cifrelor semnificative, adică cu 9, și numărul obținut (54) scrieți-l ca înmulțitor sub numărul 12 345 679:

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times \quad 54 \\ \hline \end{array}$$

Ce vom obține drept produs:

Interlocutorul efectuează înmulțirea și obține, uimit, un rezultat format numai din cifra lui preferată:

666 666 666

— Vedeți ce gust aritmetic fin aveți — spuneți dumneavoastră. Ați știut să alegeți dintre toate cifrele tocmai pe aceea care are această proprietate minunată!

Care este însă explicația:

De un gust tot atît de rafinat ar fi dat dovadă interlocutorul dacă ar fi ales orice altă cifră de la 1 pînă la 9, pentru că fiecare din ele are aceeași proprietate:

12 345 679	12 345 679	12 345 679
× 4 × 9	× 7 ×9	×9 ×9
444 444 444	777 777 777	999 999 999

De ce se petrec lucrurile așa, veți înțelege imediat dacă vă amintiți ceea ce s-a vorbit despre numărul 12 345 679 la „Galeria curiozităților numerice".

GHICIREA DATEI NAȘTERII

Scamatoriile din această categorie pot fi foarte diferite. Voi descrie una din variantele acestei scamatorii destul de complicată, dar deosebit de interesantă pentru cei neinițiați.

Presupunem că v-ați născut la 18 mai și că aveți acum 23 de ani. Eu, desigur, nu cunosc nici data nașterii, și nici vîrsta dumneavoastră. Cu toate acestea vă promit că ghicesc și una și cealaltă, punîndu-vă să faceți numai cîteva calcule.

Iată acest calcul: numărul de ordine al lunii (mai este luna a 5-a) trebuie înmulțit cu 100, se adaugă la produsul astfel obținut ziua nașterii (18); se va dubla suma, și se adună 8 la rezultat; numărul obținut se înmulțește cu 5; se mai adaugă la produs 4; rezultatul se va înmulți cu 10; se adaugă încă 4 și la numărul astfel obținut se adună vîrsta pe care o aveți (23).

După ce efectuați toate operațiile îmi veți comunica rezultatul final al calculelor făcute. Eu voi scădea din el 444, iar rezultatul obținut îl voi împărți în grupuri de cîte două cifre, de la dreapta spre stînga; obțin imediat ziua și luna nașterii dumneavoastră, precum și vîrsta.

Într-adevăr, să efectuăm succesiv toate operațiile indicate mai sus:

$$\begin{aligned}
5 \times 100 &= 500\\
500 + 18 &= 518\\
518 \times 2 &= 1\,036\\
1\,036 + 8 &= 1\,044\\
1\,044 \times 5 &= 5\,220\\
5\,220 + 4 &= 5\,224\\
5\,224 \times 10 &= 52\,240\\
52\,240 + 4 &= 52\,244\\
52\,244 + 23 &= 52\,267
\end{aligned}$$

Făcînd scăderea 52 267—444, obținem numărul 51 823.

Acum împărțim acest număr în grupuri de cîte două cifre fiecare, de la dreapta spre stînga. Avem:

5—18—23

adică luna a 5-a (mai), ziua 18, vîrsta 23 ani.

Cum am obținut acest rezultat?

Secretul îl dă următoarea egalitate:

$$\{[(100\,m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = 10\,000\,m + 100\,t + n$$

Cu litera m s-a notat numărul de ordine al lunii, cu t — ziua, cu n — vîrsta. Partea stîngă a egalității exprimă toate operațiile efectuate succesiv, iar cea dreaptă — rezultatul care trebuie obținut dacă se fac toate operațiunile arătate de semne și paranteze. În expresia $10\,000\,m + 100\,t + n$ nici m, nici t și nici n nu pot fi mai mari decît niște numere de două cifre; de aceea numărul obținut drept rezultat, la împărțirea în grupuri de cîte două cifre, trebuie totdeauna să cuprindă trei părți, exprimate prin numerele căutate m, t, și n.

Credem că cititorul va fi suficient de inventiv pentru a găsi diferite variante ale acestei scamatorii, adică alte combinații ale operațiilor aritmetice care să dea același rezultat.

Propunem cititorului să găsească secretul următoarei scamatorii simple, care a fost descrisă în „Aritmetica" lui Magnițki în capitolul „Despre cîteva operații distractive bazate pe aritmetică".

Să aleagă cineva un număr oarecare referitor la bani, la zile, la ore sau la un obiect oarecare care poate fi numărat. Ne vom opri asupra exemplului cu inelul îmbrăcat pe falanga a doua a degetului mic (adică a celui de-al cincilea deget) de către o a patra persoană din cele opt de față. Cînd în această societate apare ghicitorul, el este întrebat: la care din cele opt persoane (numerotate cu cifre de la 1 pînă la 8), pe ce deget și pe care falangă se găsește inelul?

„Iar el spune: cineva dintre dumneavoastră să-l înmulțească pe acela care l-a luat cu 2 și să adauge 5, apoi să înmulțească din nou cu 5, să adune degetul pe care este inelul (adică numărul degetului cu inelul). În continuare înmulțește cu 10, adaugă falanga pe care se află inelul și spune numărul obținut.

4 лицѣ
2 мно́жи:
8
5 приложи́:
13
5 мно́жи:
65
5 приложи́ и пе́рсть:
70
10 мно́жи:
700
составъ 2 приложи́.
702
250
452

Fig. 50 — Așa e prezentată scamatoria matematică în „Aritmetica" lui Magnițki.

Ei au procedat așa cum le-a propus, înmulțindu-l pe al patrulea om care a luat inelul și efectuînd

toate celelalte operații cerute (vezi calculele); au găsit numărul 702, din care s-a scăzut 250, a rămas 452; răspunsul este: omul al patrulea, degetul al cincilea, falanga a doua."

Nu trebuie să ne mire faptul că această scamatorie aritmetică era cunoscută încă de acum 200 de ani; o problemă asemănătoare am găsit și într-una din primele culegeri de probleme distractive matematice — „Probleme numerice distractive și plăcute" a lui Bache-de-Mésiraique, care a apărut în 1612 — fiind luată din lucrarea lui Leonardo din Pisa (Fibonacci) (1202). Trebuie să menționăm că în general marea majoritate a jocurilor, ghicitorilor și scamatoriilor matematice care se folosesc și în prezent sînt de origine foarte veche.

GHICIREA NUMERELOR

Fără a vă întreba ceva, voi ghici rezultatul pe care îl veți obține în urma unor operații efectuate cu numărul ales de dumneavoastră.

Alegeți orice cifră afară de zero. Înmulțiți-o cu 37. Înmulțiți rezultatul cu 3. Tăiați ultima cifră a produsului, iar numărul rămas împărțiți-l cu cifra aleasă inițial; nu veți avea rest.

Eu nu pot să vă spun ce număr ați aflat, deși l-am scris cu mult înainte să începeți lectura acestei cărți.

Ați obținut numărul 11.

A doua oară facem această scamatorie cu mici schimbări. Alegeți un număr format din două cifre. Adăugați în dreapta lui încă o dată același număr. Numărul obținut astfel împărțiți-l la cel ales inițial; împărțirea se va face fără rest. Adunați toate cifrele cîtului.

Ați obținut 2.

Dacă nu este așa, atunci verificați cu atenție calculele și vă veți convinge de faptul că ați greșit dumneavoastră, și nu eu.

Care este explicația acestor scamatorii?

E x p l i c a ț i e . În primul exemplu numărul ales se înmulțea întîi cu 37, iar apoi cu 3. Dar $37 \times 3 = 111$,

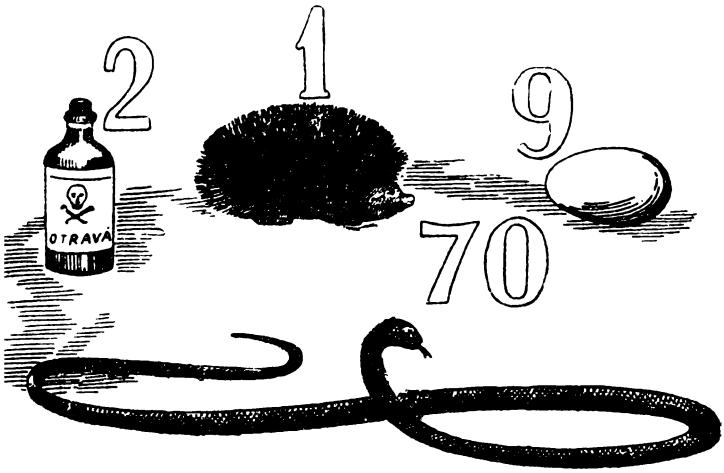
și a înmulți o cifră cu 111 înseamnă a obține un număr din trei cifre egale (de exemplu $4 \times 37 \times 3 = 444$). Ce-am făcut mai departe? Am tăiat ultima cifră și, prin urmare, am găsit un număr format din două cifre de același fel (44) care, desigur, trebuie să se împartă cu numărul ales și să dea cîtul 11.

În cel de-al doilea exemplu numărul de două cifre ales l-am scris de două ori; de exemplu, alegînd 29 am scris 2 929. Asta înseamnă că am înmulțit numărul ales cu 101 (într-adevăr, $29 \times 101 = 2\,929$). O dată ce știu acest lucru, pot să prevăd cu siguranță că în urma împărțirii unui astfel de număr format din patru cifre cu numărul ales inițial se va obține 101 și, prin urmare, suma cifrelor cîtului (1+0+1) este egală cu 2.

După cum vedeți, explicația o găsim în însești proprietățile numerelor 111 și 101; sîntem îndreptățiți deci să plasăm aceste două numere în vitrina noastră de curiozități aritmetice.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE

$$100 = \begin{cases} 24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} \\ 47\frac{3}{6} + 52\frac{9}{18} \end{cases}$$



CAPITOLUL VII

CALCULE RAPIDE

FENOMENE REALE ŞI IMAGINARE

Cei care au participat la spectacolele calculatorului sovietic Arrago, fără îndoială, nu au putut să nu rămînă uimiţi de rapiditatea cu care efectua calculele. De exemplu, Arrago a calculat în minte cubul numărului 4 729 în mai puţin de un minut (rezultatul: 105 756 712 489), iar pentru înmulţirea numerelor 679 321 × 887 064, efectuată tot în minte, lui nu i-au trebuit decît 1 1/2 minute. Aici nu mai este vorba de scamatorii, ci de aptitudini naturale deosebite. Eu am avut posibilitatea de a urmări calculele acestui calculator fenomenal nu numai pe estradă, ci şi în casă, între patru ochi, şi m-am convins că el nu foloseşte

nici un fel de metode speciale de calcul, efectuînd operațiile în minte așa cum le facem noi pe hîrtie. Numai memoria lui neobișnuită în ce privește numerele îl ajută să nu se folosească de scrierea rezultatelor intermediare, ci să opereze cu numerele formate din două cifre tot așa de ușor cum lucrăm noi cu numerele alcătuite dintr-o singură cifră. Datorită acestui fapt, pentru el înmulțirea unui număr format din șase cifre cu un alt număr de șase cifre nu prezintă mai multă greutate decît cea pe care o întîmpinăm cînd înmulțim două numere de cîte trei cifre.

Astfel de fenomene ca Arrago în U.R.S.S., sau ca Inodi, Diamandi Rückle, doctor Frid Brauns în apus, se întîlnesc rar. Pe lîngă ei însă apar pe scena de estradă matematicieni de alt gen, care își bazează arta pe anumite trucuri aritmetice. Poate că ați auzit sau ați participat la „spectacolele unor matematicieni geniali" care calculau cu o rapiditate uimitoare cîte zile ați trăit, cîte minute, secunde, în ce zi a săptămînii v-ați născut etc. Numai că pentru majoritatea acestor calcule nu sînt necesare aptitudini matematice deosebite. Trebuie să știm numai cîteva secrete ale acestor scamatorii, de a căror dezvăluire ne vom și ocupa imediat.

MEMORIZAREA NUMERELOR

Cel care efectuează calcule rapide trebuie să aibă în primul rînd o memorie deosebită a numerelor. Cît de dezvoltată poate fi această memorie la cei mai buni calculatori ne arată următoarele recorduri. Cunoscutul calculator german Rückle a învățat pe dinafară un număr format din 504 cifre în numai 35 de minute, iar compatriotul lui, Dr. Brauns, a depășit acest record învățînd același număr în mai puțin de 13 minute!

Bineînțeles, puțini oameni au de la natură asemenea memorie fenomenală. Calculatorii profesioniști care nu au o memorie deosebită a numerelor se ajută de diferite metode artificiale (așa-numite „mnemonice"). În viața de toate zilele și noi încercăm să folosim aceste

metode și în majoritatea cazurilor trebuie să recunoaștem că le alegem destul de prost. Dorim, de exemplu, să memorăm numărul de telefon 25—49; noi ne punem speranțele în faptul că acest număr poate fi readus cu ușurință în memorie pentru că este format din două pătrate perfecte: $25 = 5^2$, $49 = 7^2$. Însă atunci cînd trebuie să ni-l reamintim, constatăm că avem la dispoziție un șir de numere din care putem alege:

49—25, 36—64, 25—16, 64—16, 81—25 etc.

Încurcături se ivesc și în alte cazuri. Fie numărul de telefon 17—53; ne hotărîm să-l memorăm folosindu-ne de faptul că suma primelor două cifre (1 + 7) este egală cu suma ultimelor două (5 + 3). Rezultatul final însă nici acum nu este mai bun decît în cazul precedent. Și cînd te gîndești că mai trebuie să ții minte cine este posesorul telefonului la a cărui memorare s-a folosit metoda respectivă. Este uimitor cu cîtă perseverență caută oamenii să folosească această metodă, evident inutilă. De această pasiune și-a bătut joc cu mult spirit scriitorul I. Hašek în cunoscutele lui „Peripețiile bravului soldat Švejk":

«Iar Švejk citi pe patul carabinei numărul de serie și izbucni:

— 4268! Numărul ăsta l-a avut o locomotivă de cale ferată de pe linia șaisprezece din gara Peciky. Trebuia dusă la depoul din Lysa pe Labem, pentru reparație, dar n-a fost chiar așa de ușor, d-le plutonier, pentru că mecanicul care urma s-o conducă pînă acolo avea slabă ținere de minte la cifre. Impiegatul de mișcare l-a chemat la el la cantelarie și i-a spus:

„Pe linia șaisprezece se află locomotiva cu numărul 4268. Eu știu că dumneata n-ai ținere de minte la cifre și că, atunci cînd ți se scrie un număr pe hîrtie, pierzi hîrtia. Dar fii cu băgare de seamă la ce-ți spun, dacă nu ții minte cifrele: am să-ți arăt ce ușor e să ții minte orice cifră. Numai să fii cu băgare de seamă: locomotiva pe care trebuie s-o duci la depoul din Lysa pe Labem are numărul 4268. Va să zică, atenție: prima cifră e 4, a doua 2. Ții minte 42, adică 2 ori 2; asta înseamnă că dacă începi de la stînga ai mai întîi 4

pe care-l împarți la 2, și-ți dă 2, așa că iar ai frumos aranjat, unul lîngă altul, 4 și 2. Ei, și acum să nu te sperii. Cît face doi ori 4, opt, nu? Bun, întipărește-ți în minte că din numărul 4268 cifra opt este ultima la rînd. Dacă ții minte că prima este 4, a doua 2, a patra 8, nu mai rămîne decît să fii deștept și să ții minte și pe 6, care vine înainte de opt. Lucru-i la mintea cocoșului: prima cifră este 4, a doua doi, patru și cu doi fac șase. Care va să zică, acum ești sigur că a doua de la capăt este șase; de acum în colo ordinea cifrelor nu-ți mai iese din minte. Îți rămîne în cap numărul 4268. Sau, putem ajunge la același rezultat, pe o cale și mai simplă...

. . . . . .

Și atunci a început să-i explice o metodă mai simplă, ca să-și amintească de numărul 68. Șase fără doi fac 4, care va să zică are 4—68, nu mai rămîne decît să-l bage pe 2 și gata: 4—2—6—8. De altfel nu-i prea greu dacă socoteala se face și altfel: cu ajutorul înmulțirii și împărțirii. Se ajunge la același rezultat. Ții minte, — i-a spus impiegatul — că de două ori 42 fac 84. Anul are 12 luni. Se scade 12 din 84 și ne rămîne 72, din care mai scădem 12 luni și rămînem cu 60. Așadar pe 6 îl avem asigurat, iar pe zero îl ștergem. Va să zică avem așa: 42,68,4. Dacă l-am tăiat pe zero, îl tăiem și pe 4 din coadă și ne asigurăm iarăși, foarte ușor, 4268, numărul locomotivei pe care trebuie s-o duci la depoul din Lysa pe Labem.“»

Metodele folosite de calculatorii de estradă sînt de cu totul alt gen. Iată una dintre ele, care la nevoie poate fi utilă pentru oricare din noi.

Calculatorul leagă de cifre anumite consoane. Deoarece s-au ales numai consoanele, ele pot fi, fără să ne temem de vreo încurcătură, combinate cu vocalele, formîndu-se cuvinte scurte.

Aceasta este numai una din metodele mnemotehnice folosite de calculatori [1]. Există, desigur, și alte metode, dar asupra lor nu ne vom opri.

[1] Vezi mai amănunțit în cartea mea „Scamatorii și distracții“

Pentru a putea determina cu repeziciune, după numărul anilor, numărul zilelor, calculatorul recurge la următoarea metodă: înmulțește jumătate din numărul anilor cu 73 și adaugă un zero — rezultatul va fi tocmai numărul căutat. Procedeul devine clar dacă observăm că $730 = 365 \times 2$. Dacă eu am 24 de ani, atunci numărul de zile se va obține înmulțind $12 \times 73 = 876$ și, adăugînd un zero — 8 760. Însăși înmulțirea cu 73 se face într-un mod prescurtat, lucru despre care se va vorbi mai jos.

Corecția de cîteva zile care provine de la anii bisecți de obicei nu se ia în considerație, deși ea poate fi făcută cu ușurință adăugîndu-se la rezultat un sfert din numărul anilor; în exemplul nostru, $24 : 4 = 6$; prin urmare, rezultatul total este 8 766 [1].

Bineînțeles, cu cunoștințele de pînă acum cititorul va putea încerca calcularea minutelor.

„CÎTE SECUNDE AM?"

Cînd vîrsta celui ce întreabă este exprimată printr-un număr par care nu depășește 26, atunci la această întrebare se poate răspunde destul de repede folosind următoarea metodă: jumătate din numărul anilor se înmulțește cu 63; apoi, aceeași jumătate se înmulțește cu 72, rezultatul se scrie alături de primul și se adaugă trei zerouri. Dacă, de exemplu, numărul anilor este 24, atunci pentru determinarea numărului de secunde se procedează astfel:

$63 \times 12 = 756$; $72 \times 12 = 864$, rezultatul este 756 864 000.

[1] Cu ajutorul metodelor de înmulțire rapidă arătate mai departe, aceste operații sînt mult simplificate și rezultatul, care conține milioane, se obține foarte rapid. Îl sfătuiesc pe cititor să încerce să efectueze aceleași calcule pe cale obișnuită, pentru a se convinge cîtă economie de timp se face prin folosirea formulei de mai sus și a metodelor indicate mai departe.

Ca și în exemplul precedent, aici nu se ține seama de anii bisecți — o eroare pe care nimeni nu i-o va imputa calculatorului atunci cînd el are de-a face cu sute de milioane (ea poate fi corectată adăugîndu-se numărul de secunde care sînt cuprinse în numărul de zile egal cu a patra parte din numărul anilor).

Pe ce se bazează metoda arătată mai sus?

Pentru a determina numărul de secunde cuprins în numărul respectiv de ani este necesar să se înmulțească anii (în exemplul nostru 24) cu numărul de secunde dintr-un an, adică: $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31\,536\,000$. Vom face același lucru numai că factorul 31 536 îl împărțim în două (adăugarea de zerouri se înțelege de la sine). În locul înmulțirii lui 24 cu 31 536, înmulțim 24 cu 31 500 și cu 36; pentru comoditate însă înlocuim aceste calcule cu altele, după cum se vede din schema de mai jos:

$$24 \times 31\,536 = \begin{cases} 24 \times 31\,500 = 12 \times 63\,000 = 756\,000 \\ 24 \times \quad 36 = 12 \times \quad 72 = \quad 864 \end{cases}$$

$$756\,864$$

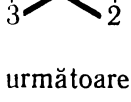
Rămîne doar să adăugăm trei zerouri și avem rezultatul căutat: 756 864 000.

METODE DE ÎNMULȚIRE RAPIDĂ

Am menționat mai sus că pentru efectuarea acelor operații de înmulțire, în care se defalcă fiecare din procedeele indicate mai sus există metode foarte potrivite. Unele din ele sînt extrem de simple; ele ușurează atît de mult calculele, încît credem că nu ar fi de prisos ca cititorul să le memoreze și să le folosească în mod obișnuit. Astfel este, de exemplu, metoda înmulțirii încrucișate, foarte comodă pentru efectuarea operațiilor cu numere de două cifre. Metoda nu este nouă; ea a fost folosită din antichitate de către greci și indieni și se numea „metoda fulgerului" sau „înmulțirea în

cruce". Acum este aproape uitată și credem că nu-i rău s-o amintim.

Presupunem că trebuie să înmulțim 24 × 32. Așezăm în minte numerele unul sub altul după schema următoare:



Efectuăm succesiv următoarele operații:

1) 4 × 2 = 8, este ultima cifră a rezultatului.

2) 2 × 2 = 4; 4 × 3 = 12; 4 + 12 = 16; 6 este penultima cifră a rezultatului; 1 ținem minte.

3) 2 × 3 = 6, la care adăugăm unitatea ținută minte; se obține 7, adică prima cifră a rezultatului.

Prin urmare, avem produsul 768.

După cîteva exerciții această metodă este foarte ușor însușită.

În continuare vom prezenta altă metodă, care constă în folosirea așa-numitelor „completări", comodă în cazul cînd numerele înmulțite se apropie de 100.

Presupunem că este necesar să înmulțim 92 × 96. „Completarea" pentru 92 pînă la 100 va fi 8, pentru 96 va fi 4. Operația se efectuează după schema următoare:

factorii:	92 și 96
„completările"	8 și 4

Primele două cifre ale rezultatului se obțin prin scădere simplă din deînmulțit a „completării" înmulțitorului, sau invers din înmulțitor a „completării" deînmulțitului; adică din 92 se scade 4 sau din 96 se scade 8. În ambele cazuri avem 88; lîngă număr se scrie produsul „completărilor": 8 × 4 = 32. Obținem rezultatul 8 832.

Din transformările de mai jos se vede că rezultatul este corect:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88\,(100-4) = 88\times 100 - 88\times 4 \\ 4 \times 96 = 4\,(88+8) = 4\times 8 + 88\times 4 \end{cases}$$

$$92 \times 96 = 8\,832+0$$

Iată alt exemplu:
Trebuie înmulțit 78 cu 77.
Factorii înmulțirii: 78 și 77,
„completările": 22 și 23

$$78-23 = 55$$
$$22\times 23 = 506$$
$$5\,500+506 = 6\,006$$

Un al treilea exemplu:
Să se înmulțească 99×98.
Factorii înmulțirii: 99 și 98,
„completările": 1 și 2

$$99-2 = 97$$
$$1\times 2 = 2$$

În cazul de față trebuie să ținem minte că 97 reprezintă numărul de sute. De aceea adunăm:

$$9\,700+2 = 9\,702$$

PENTRU CALCULELE COTIDIENE

Există un număr foarte mare de metode pentru efectuarea rapidă a operațiilor aritmetice, care sînt destinate calculelor cotidiene. În legătură cu aceasta s-ar putea scrie o carte întreagă dacă ne-am propune chiar numai descrierea metodelor celor mai principale[1]. Mă voi limita doar la cîteva exemple mai ușor de efectuat.

[1] Vezi, de ex.: G. N. Berman, „Metode de calcul", ed. VI, Fizmatghiz, 1959.

În practica calculelor tehnice și comerciale sînt numeroase cazurile cînd trebuie să se adune coloane de numere apropiate între ele ca mărime. De exemplu:

43
38
39
45
41
39
42

Adunarea acestor numere este mult simplificată dacă folosim metoda indicată mai jos, a cărei esență este ușor accesibilă.

$43 = 40 + 3$
$38 = 40 - 2$
$39 = 40 - 1$
$45 = 40 + 5$
$41 = 40 + 1$
$39 = 40 - 1$
$42 = 40 + 2$

$40 \times 7 = 280$
$3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2 = 7$
$280 + 7 = 287$

Tot astfel găsim suma:

$752 = 750 + 2$
$753 = 750 + 3$
$746 = 750 - 4$
$754 = 750 + 4$
$745 = 750 - 5$
$751 = 750 + 1$

$750 \times 6 + 1 = 4\,501$

În mod asemănător se procedează în calculul mediei aritmetice a numerelor apropiate ca mărime. Să aflăm de exemplu media următoarelor prețuri:

Ruble	*Copeici*	
4	65	Stabilim din ochi prețul rotund apropiat de cel mediu — în cazul de față acesta va fi desigur 4 r. 70 c. Notăm devierile tuturor prețurilor în jurul celui mediu: surplusurile cu semnul +, lipsurile cu semnul —. Obținem: $-5+3+5-3+8+4-2+2 = 12$
4	73	
4	75	
4	67	
4	78	
4	74	
4	68	
4	72	

Împărțind suma devierilor cu numărul lor avem: $12 : 8 = 1{,}5$.

De aici, prețul mediu căutat este:

$$4 \text{ r.}70 \text{ c.} + 1{,}5 \text{ c.} = 4 \text{ r.}71\ \frac{1}{2} \text{ c.}$$

Trecem la **înmulțire**. Aici vom arăta înainte de toate că înmulțirea cu numerele 5, cu 25 și 125 este mult simplificată dacă avem în vedere următoarele:

$$5 = \frac{10}{2};\ 25 = \frac{100}{4};\ 125 = \frac{1\,000}{8}$$

De aceea, putem scrie:

$$36 \times 5 = \frac{360}{2} = 180;$$

$$36 \times 25 = \frac{3\,600}{4} = 900;$$

$$36 \times 125 = \frac{3\,600}{8} = 4\,500;$$

$$87 \times 5 = \frac{870}{2} = 435;$$

$$87 \times 25 = \frac{8\,700}{4} = 2\,175;$$

$$87 \times 125 = \frac{87\,000}{8} = 10\,875$$

La înmulțirea cu 15 putem folosi faptul că:

$$15 = 10 \times 1\ \frac{1}{2}$$

Pe această bază se pot efectua în minte calcule de genul următor:

$$36 \times 15 = 360 \times 1\ \frac{1}{2} = 360 + 180 = 540$$

sau, mai simplu,

$$36 \times 1\frac{1}{2} \times 10 = 540$$

$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1\,305$$

La înmulțirea cu 11 nu este de loc necesar să se scrie cinci rînduri:

$$\begin{array}{r} 383 \\ \times\ \ 11 \\ \hline 383 \\ +\ 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

Este suficient ca sub deînmulțit să copiem încă o dată același număr deplasat cu o cifră spre stînga:

$$\begin{array}{r} 383 \\ +\ 383 \\ \hline 4213 \end{array} \quad \text{sau} \quad \begin{array}{r} .383 \\ \ \ 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

și să se efectueze adunarea.

Foarte util este să ținem minte rezultatele obținute prin înmulțirea primelor nouă cifre cu 12, 13, 14 și 15. În felul acesta înmulțirea numerelor de mai multe cifre cu acești înmulțitori va fi simplificată. Să presupunem că trebuie să înmulțim:

$$\begin{array}{r} 4587 \\ \times\ \ 13 \\ \hline \end{array}$$

Procedăm în felul următor. Fiecare cifră a deînmulțitului o înmulțim în minte dintr-o dată cu 13:

$7 \times 13 = 91$; scriem 1, ținem minte 9
$8 \times 13 = 104$; $104 + 9 = 113$; scriem 3, ținem minte 11
$5 \times 13 = 65$; $65 + 11 = 76$; scriem 6, ținem minte 7;
$4 \times 13 = 52$; $52 + 7 = 59$
în total: 59 631

Metoda se însușește ușor, chiar după cîteva exerciții;

Există un procedeu foarte comod pentru înmulțirea numerelor de două cifre cu 11: distanțăm cifrele deînmulțitului și scriem între ele suma lor:

$$43 \times 11 = 473$$

Dacă suma cifrelor este formată din două cifre, atunci numărul zecilor ei se adaugă la prima cifră a deînmulțitului:

$$48 \times 11 = 4\ (12)\ 8, \text{ adică } 528$$

Să dăm, în sfîrșit, cîteva exemple de împărțire rapidă. La împărțirea cu 5 se înmulțește atît deîmpărțitul cît și împărțitorul cu 2:

$$3\,471 : 5 = 6\,942 : 10 = 694{,}2$$

La împărțirea cu 25 se înmulțesc ambele numere cu 4:

$$3\,471 : 25 = 13\,884 : 100 = 138{,}84$$

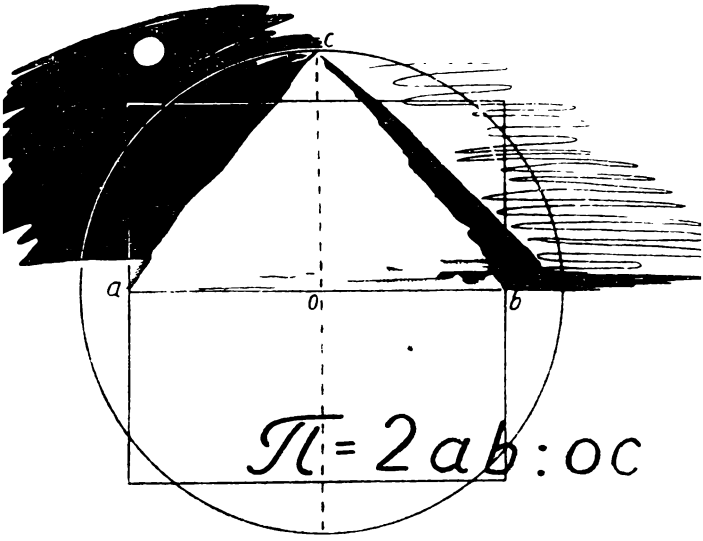
În mod asemănător se procedează la împărțirea cu $1^1/_2$ (egal cu 1,5) și cu $2^1/_2$ (adică 2,5):

$$3\,471 : 1\frac{1}{2} = 6\,942 : 3 = 2\,314$$

$$3\,471 : 2{,}5 = 13\,884 : 10 = 1\,388{,}4$$

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 74\frac{3}{6} + 25\frac{9}{18} \\ 95\frac{3}{7} + 4\frac{16}{28} \end{cases}$$



CAPITOLUL VIII

CALCULE APROXIMATIVE

GHICITORI MATEMATICE LEGATE DE PIRAMIDA LUI KEOPS

Cea mai înaltă piramidă din Egiptul antic — piramida lui Keops, bătută timp de 5 milenii de vînturile aride ale pustiului este fără îndoială cea mai minunată construcție rămasă din timpurile lumii antice (fig. 51). Avînd o înălțime de aproape 150 m, baza ei acoperă o suprafață de 40 000 m² și este formată din 200 de rînduri de pietre uriașe. 100 000 de sclavi în decurs de 30 de ani au muncit la ridicarea acestei piramide. Timp de 10 ani au construit numai drumul pentru transportul pietrelor de la cariera de piatră pînă la

locul construcției, iar alți 20 de ani le-au îngrămădit unele peste altele cu ajutorul mașinilor rudimentare din acele vremuri.

Este îndoielnic faptul că o astfel de construcție uriașă ar fi fost ridicată cu unicul scop de a servi drept

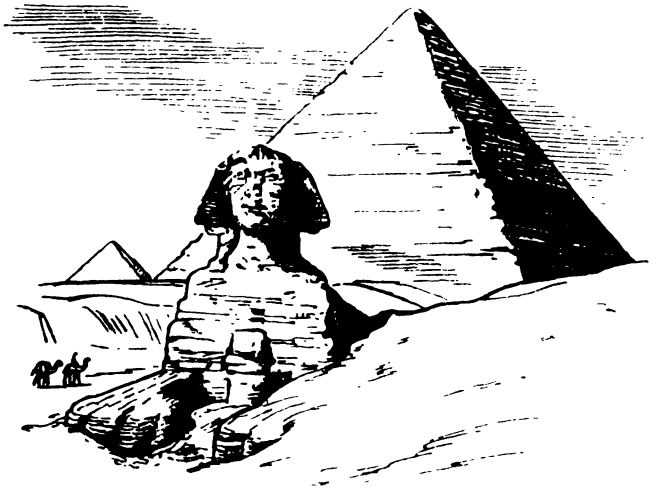


Fig. 51 — Ce enigme matematice ascund piramidele egiptene ?

mormînt pentru domnitorii țării. De aceea unii cercetători au încercat să caute misterul ei în relațiile dintre dimensiunile piramidei.

Reușind să găsească o serie de corelații între elementele geometrice ale piramidei, acești cercetători credeau că preoții, conducătorii lucrărilor de construcție, aveau cunoștințe largi de matematică și astronomie și că aceste cunoștințe și-au găsit expresia în formele de piatră ale piramidei.

« Herodot [1] povestește — citim în cartea astronomului francez Mauret („Ghicitorile științei", 1926, vol. 1) — că preoții egipteni au dezvăluit următoarea

[1] Cunoscutul istoric grec a vizitat Egiptul cu 300 de ani înainte erei noastre.

relație între o latură a bazei piramidei și înălțimea ei: aria patratului avînd ca latură înălțimea piramidei este egală cu aria fiecăruia din triunghiurile laterale. Lucrul acesta este pe deplin confirmat de cele mai noi măsurători, și constituie dovada faptului că în toate timpurile piramida lui Keops a fost privită ca un monument ale cărui dimensiuni s-au calculat pe cale matematică.

Voi da aici încă un argument apărut mai tîrziu: noi știm că raportul dintre lungimea circumferinței și diametrul cercului este o mărime constantă, bine cunoscută elevilor astăzi. Pentru a calcula lungimea cercului este suficient să se înmulțească diametrul lui cu 3,1416.

Matematicienii antichității cunoșteau acest raport numai cu aproximație.

Dacă adunăm însă cele patru laturi ale bazei piramidei, obținem un perimetru de 931,22 m. Împărțind numărul 931,22 cu înălțimea dublă (2×148,208) avem ca rezultat 3,1416, adică raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său. (Alți autori calculează valoarea lui π din aceleași dimensiuni ale piramidei cu o exactitate și mai mare: 3,14159 — I.P.)

Acest monument unic în felul lui reprezintă deci expresia materială a numărului „π", care a jucat un rol atît de important în istoria matematicii. După cum vedem preoții egipteni aveau noțiuni exacte cu privire la o serie de probleme considerate drept descoperiri ale savanților din secolele de mai tîrziu»[1].

Mai curioasă este o altă corelație: dacă o latură a bazei piramidei se împarte la durata exactă a unui an — 365,2422 zile, atunci se obține exact a 10-a milioana parte din semiaxa globului pămîntesc, cu o precizie pe care ar putea-o invidia astronomii contemporani...

Mai departe: înălțimea piramidei este exact a miliarda parte din distanța Pămînt-Soare — mărime care a devenit cunoscută științei europene doar la sfîrșitul

[1] Valoarea lui „π", calculată cu precizia cu care a fost obținută din raportul dintre dimensiunile piramidei, a devenit cunoscută matematicienilor europeni numai în sec. XVI.

sec. al XVIII-lea. Se constată, deci, că egiptenii cu 5 000 de ani în urmă știau cea ce nu cunoșteau încă contemporanii lui Galileu și Kepler și nici savanții din epoca lui Newton. Nu este de mirare faptul că cercetările de acest gen au dat naștere în apus unei literaturi vaste.

Și totuși, acestea nu sînt decît un joc al cifrelor. Lucrurile vor apare într-o cu totul altă lumină dacă le vom examina folosind rezultatele calculelor aproximative.

Să reluăm deci în aceeași ordine exemplele de mai sus.

1) Despre numărul „π". Aritmetica numerelor aproximative afirmă că dacă în rezultatul operației de împărțire dorim să obținem un număr de șase cifre exacte (3,14159), trebuie să avem la deîmpărțit și împărțitor cel puțin tot atîtea cifre exacte. Aceasta — aplicat la piramidă — înseamnă că pentru obținerea unui „π" format din șase cifre, atît latura bazei cît și înălțimea piramidei ar trebui măsurate cu o exactitate de pînă la o milionime, adică pînă la 1 mm. Astronomul Mauret dă pentru înălțimea piramidei rezultatul de 148,208 m, adică la prima vedere cu o exactitate de 1 mm.

Dar cine va garanta această precizie de măsurare a piramidei? Ne vom aminti că în laboratorul institutelor meteorologice, în care se efectuează măsurătorile cele mai exacte, nu se pot obține asemenea date precise asupra lungimii (la măsurarea lungimii se obțin numai șase cifre exacte). Se înțelege de la sine că rezultatul măsurării colosului de piatră din deșert va fi mult mai puțin exact. Este drept că la lucrările de măsurătoare ale terenurilor (la măsurarea așa-numitelor „baze") se poate realiza aceeași precizie ca în laborator, adică o precizie de șase cifre exacte în rezultat. Dar lucrul acesta este imposibil în condițiile măsurării piramidei: nu se pot cunoaște dimensiunile inițiale reale ale piramidei, pentru că materialul care a acoperit piramida a fost ros de vînturi și nimeni nu știe grosimea stratului acesta extern. Se impune deci să iei dimensiunile piramidei în metri întregi; și atunci

se obține un „π" care nu este mai exact decît cel cunoscut din papirusul matematic al lui Rhind.

Dacă piramida reprezintă într-adevăr expresia în piatră a numărului „π", atunci această expresie este, după cum vedem, departe de a fi perfectă. Foarte posibil este însă ca piramida să nu fi fost construită pentru a exprima acest raport. În limitele numerelor de trei cifre aproximative, pentru dimensiunile piramidei se pot face și alte presupuneri. Se poate, de exemplu, ca pentru înălțimea piramidei să se fi luat 2/3 din muchia piramidei sau 2/3 din diagonala bazei ei. Este pe deplin posibilă și relația indicată de Herodot: înălțimea piramidei este rădăcina patrată din aria unei fețe laterale. Dar acestea sînt tot atît de probabile ca și „ipoteza lui π".

2) Următoarea afirmație privește durata anului și lungimea razei globului pămîntesc: dacă împărțim latura bazei piramidei cu durata exactă a anului (un număr format din șapte cifre) atunci obținem cu precizie a zecea milioana parte din axa globului pămîntesc (un număr de cinci cifre). Însă o dată ce cunoaștem că în deîmpărțit nu avem mai mult de trei cifre exacte, este clar ce preț putem pune pe cele șapte și cinci cifre ale împărțitorului și cîtului. Aritmetica poate garanta în cazul de față numai pentru primele trei cifre din durata anului și ale razei globului pămîntesc. Anul de 365 de zile și raza globului de aproximativ 6 400 km, iată numerele despre care avem dreptul să vorbim aici.

3) Cît privește distanța de la Pămînt la Soare, aici există o nedumerire de altă natură. Este curios chiar că adepții acestei teorii nu observă greșeala logică pe care o comit. Dacă, așa cum afirmă ei, o latură a piramidei formează o anumită fracție din raza globului pămîntesc, iar înălțimea — o anumită fracție din bază, nu se mai poate spune că aceeași înălțime constituie o fracție anumită din distanța pînă la Soare. Ori una, ori alta. Iar dacă întîmplător se observă aici o corespondență interesantă între cele două lungimi, ea a existat totdeauna în sistemul nostru solar și nu poate fi vorba de nici un merit din partea preoților.

Adepții acestei teorii merg și mai departe: ei afirmă că masa piramidei constituie exact a mia trilionimea parte din masa globului pămîntesc. După părerea lor această relație nu poate fi întîmplătoare și arată că preoții Egiptului antic cunoșteau nu numai dimensiunile geometrice ale planetei noastre, dar încă din acele vremuri au calculat masa ei, „au cîntărit" globul pămîntesc.

Găsim aceeași lipsă de logică ca și în exemplul privind distanța Pămînt-Soare. Este cu totul absurd să spunem că masa piramidei a fost „aleasă" într-o anumită relație cu masa globului pămîntesc. Masa piramidei s-a definit din momentul cînd a fost ales materialul ei și dimensiunile bazei și înălțimii. Nu se poate pune de acord înălțimea piramidei cu baza care formează o anumită fracție din raza globului pămîntesc și, independent de aceasta, să se realizeze legătura dintre masa ei și masa Pămîntului. Una este determinată de cealaltă. Prin urmare, trebuie respinse orice presupuneri cu privire la cunoașterea de către egipteni a masei globului pămîntesc. Cele expuse mai sus nu sînt decît o echilibristică numerică. Operînd cu abilitate cu numere, sprijinindu-ne pe coincidențe întîmplătoare, se poate demonstra orice.

Am văzut ce fundament șubred stă la baza legendei despre cunoștințele savante ale preoților — arhitecți, constructori ai piramidei. Totodată avem aici o demonstrație clară a utilității acelui capitol al aritmeticii care se ocupă de numerele aproximative.

•

NUMERELE APROXIMATIVE

Pentru cei ce nu cunosc regulile operațiilor cu numere aproximative, va fi interesant să facă măcar pe scurt cunoștință cu ele, cu atît mai mult cu cît cunoașterea acestora este utilă din punct de vedere practic, permițînd economie de muncă și timp la efectuarea calculelor.

Vom explica înainte de toate ce este un „număr aproximativ" şi cum se obţin asemenea numere.

Datele care intră în calculele tehnice se obţin pe calea măsurătorilor. Dar nici o măsurătoare nu poate fi efectuată cu precizie absolută. Înainte de toate, înseşi unităţile de muncă folosite conţin o anumită eroare. Confecţionarea unor rigle, greutăţi de un kg, unităţi de măsură pentru litru este foarte grea, şi în construcţia lor se admit anumite erori. De exemplu, la confecţionarea unei rigle cu lungimea de 1 m se admite o toleranţă de pînă la 1 mm; pentru lanţul geodezic cu lungimea de 10 m, toleranţa este de pînă la 1 cm; pentru greutatea de 1 kg — pînă la 1 gram[1]; pentru greutăţile de 1 g ajunge la 0,01 g; pentru unitatea de măsură de 1 litru toleranţa merge pînă la 5 cm^3.

Efectuarea măsurătorilor comportă şi ea unele erori. Presupunem că măsuraţi o distanţă oarecare, de exemplu, lăţimea străzii. Unitatea de măsură, metrul, s-a cuprins în lăţimea ei, să zicem, de 13 ori şi a mai rămas o bucăţică mai mică de 1 metru. Puteţi spune că lăţimea străzii este de 13 metri; de fapt ea este egală cu 13 metri întregi şi încă un număr oarecare de zecimi, sutimi etc. de metru, de care nu aţi ţinut seama. Prin urmare, rezultatul măsurătorii noastre poate fi reprezentat astfel:

lăţimea străzii = 13,??? metri,

unde semnele întrebării indică cifrele necunoscute ale zecimilor, sutimilor etc.

Dacă aţi dori să măsuraţi lăţimea străzii cu mai multă precizie, aţi afla şi cîţi decimetri (zecimi de metru) se cuprind în porţiunea rămasă nemăsurată. Presupunem că am găsit 8 dm, dar a mai rămas o bucăţică mai mică decît un dm. Rezultatul noii măsurători este 13,8 m; desigur mai exact decît cel precedent şi totuşi nu ab-

[1] Afară de erorile admise pentru greutăţi se acceptă anumite toleranţe şi în construcţia balanţelor. Pentru balanţa folosită în gospodărie toleranţele sînt de pînă la 1 g la fiecare kg de marfă cîntărită.

solut exact, pentru că în afara celor 8 zecimi de metru lăţimea străzii cuprinde şi un număr oarecare de sutimi şi miimi de metru. Prin urmare, rezultatul obţinut acum poate fi exprimat aşa:

13,8 ?? metri.

La o măsurătoare şi mai exactă veţi ţine seama şi de sutimile de metru (cm), dar veţi neglija restul mai mic decît un cm; înseamnă că nici acest rezultat nu va fi absolut exact. În general, cu oricîtă atenţie veţi măsura, niciodată nu puteţi fi ferm convinşi de faptul că după cifra obţinută nu s-ar mai afla şi altele încă necunoscute.

Problema nu se rezolvă prin aceea că la măsurători resturile mai mari decît jumătatea de unitate de măsură sînt de obicei considerate ca întregi. Dacă la prima măsurătoare a străzii noi am fi considerat că lăţimea ei nu este de 13, ci de 14 m, acest rezultat ar fi fost şi el numai un rezultat aproximativ. El putea fi scris astfel:

14,??? metri,

unde semnele de întrebare înseamnă cifre zecimale (adică arată cu cîte zecimi, sutimi etc. numărul 14 este mai mare decît lăţimea reală a străzii).

Nici chiar rezultatul celei mai minuţioase măsurători nu poate fi privit ca fiind absolut exact: el exprimă mărimea reală într-un mod mai mult sau mai puţin aproximativ. Astfel de numere se numesc a p r o x i m a t i v e.

Aritmetica numerelor aproximative nu se aseamănă întru totul cu aritmetica numerelor exacte. Vom arăta această deosebire cu ajutorul unui exemplu.

Presupunem că trebuie să calculăm suprafaţa unui teren dreptunghiular a cărui lungime este de 68 metri, iar lăţimea de 42 metri. Dacă numerele 68 şi 42 ar fi exacte, atunci aria terenului ar avea exact

$$68 \times 42 = 2\,856 \text{ m}^2.$$

Dar numerele 68 şi 42 nu sînt exacte, ci aproximative: lungimea nu este exact egală cu 68 metri, ci ceva mai

mare sau mai mică, pentru că este probabil ca metrul să nu se cuprindă în ea fix de 68 de ori. Pe urmă însăşi lungimea riglei de 1 metru nu credem să fi fost absolut egală cu 1 metru. În conformitate cu cele spuse mai sus, lungimea terenului în metri poate fi exprimată prin :

$$68,?$$

Tot astfel vom scrie lăţimea terenului :

$$42,?$$

Efectuăm acum înmulţirea numerelor aproximative :

$$68,? \times 42,?$$

Operaţiile sînt reprezentate în schema următoare.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{l} 68,? \\ 42,? \end{array} \\ \hline ??? \\ 136? \\ 272? \\ \hline 285?,?? \end{array}$$

Observăm că cifra a patra a rezultatului ne este necunoscută; ea trebuie să se obţină din adunarea a trei cifre (? + 6 + ?) dintre care două sînt necunoscute. Nu este sigură nici cifra a treia a rezultatului : noi am scris 5, dar din adunarea coloanei ? + 6 + ? s-ar fi putut obţine un număr mai mare decît 10, şi chiar 20; aceasta înseamnă că în loc de 5 am fi putut avea 6 sau 7. Sînt pe deplin sigure numai primele două cifre ale rezultatului (28). De aceea, putem să afirmăm doar că suprafaţa căutată este de aproximativ 28 de sute de metri patraţi. Care sînt însă cifrele zecilor şi unităţilor nu putem şti.

Astfel, răspunsul corect la problemă este 2 800 m^2; aici zerourile nu indică absenţa unităţilor din ordinul respectiv, ci numai lipsa unor cunoştinţe sigure cu privire la aceste unităţi. Cu alte cuvinte zerourile au aici

aceeaşi semnificaţie ca şi semnele întrebării din notaţiile folosite mai sus.

Este greşit să credem că răspunsul 2 856 obţinut după regulile aritmeticii numerelor exacte este mai precis decît 2 800. Am văzut doar că ultimele două cifre ale rezultatului (56) nu sînt demne de o încredere absolută — nu putem garanta pentru ele. Răspunsul 2 800 este preferabil lui 2 856, pentru că el afirmă direct că sînt sigure numai cifrele 2 şi 8, care ocupă locul miilor şi sutelor, iar cifrele următoare sînt necunoscute. Dimpotrivă, 2 856 ne face să ne gîndim, în mod nejust, că ultimele două cifre sînt tot atît de sigure ca şi primele două.

„Este necinstit să se scrie mai multe cifre decît cele pentru care putem garanta... Îmi pare foarte rău, dar trebuie să recunosc că sînt multe numere de acest fel, care duc la reprezentări cu totul eronate şi care se întîlnesc în cele mai bune lucrări despre maşinile cu abur... Cînd am învăţat la şcoală, ni s-a spus că distanţa medie de la Pămînt la Soare este de 95 142 357 mile englezeşti[1]. Mă mir de ce nu s-a specificat cîţi ţoli şi cîte picioare. Măsurătorile moderne cele mai exacte ne permit să afirmăm că această distanţă nu depăşeşte 93 de milioane şi nu este mai mică de 92,5 milioane de mile", — scria în legătură cu aceasta matematicianul englez Pearry.

Aşadar, în calculele cu numere aproximative nu trebuie să se ţină seama de toate cifrele rezultatului, ci numai de unele. Care sînt cifrele ce trebuie reţinute în aceste cazuri, şi care sînt cele ce se înlocuiesc cu zerouri, vom vedea într-un alt paragraf. Ne vom opri întîi asupra r o t u n j i r i i numerelor.

ROTUNJIREA NUMERELOR

În efectuarea calculelor rotunjirea unui număr constă în aceea că una sau cîteva cifre de la capătul lui se înlocuiesc cu zerouri. Deoarece zerourile care stau după

[1] Mila engleză este egală cu 1852 metri.

virgulă nu au nici o importanță, ele nici nu se scriu. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
3734....	3730 sau 3700
5,314.....	5,31 sau 5,3
0,00731.....	0,0073 sau 0,007

Dacă prima din cifrele neglijate la rotunjire este 6 sau o cifră mai mare, atunci cele precedente sînt sporite cu o unitate. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
4867	4870 sau 4900
5989	5990 sau 6000
3,666	3,67 sau 3,7

Tot astfel se procedează dacă se neglijează cifra 5, după care urmează și alte cifre cu valori reale. De exemplu:

numerele	se rotunjesc la
4552	4600
38,1506	38,2

Dacă se neglijează însă n u m a i cifra 5, s-a convenit ca cifra precedentă să fie mărită cu o unitate în cazul cînd ea este i m p a r ă ; cifra pară rămîne neschimbată. De exemplu:

numerele:	se rotunjesc la:
735	740
8645	8640
37,65	37,6
0,0275	0,028
70,5	70[1]

La prelucrarea rezultatelor operațiilor cu numere aproximative se ține seama de aceleași reguli de rotunjire.

---

[1] Zeroul este privit ca o cifră p a r ă.

În teoria calculelor aproximative, prin cifre cu valori reale se înţeleg toate cifrele cu excepţia zeroului, precum şi zeroul în cazul cînd el se găseşte între alte cifre cu valori reale. Astfel, în numerele 3 700 şi 0,0062 nu toate zerourile sînt cifre cu valori reale. În numerele 105 şi 2006 zerourile sînt nişte cifre cu valori reale. În 0,0708 primele două zerouri nu au valoarea reală; cel de-al treilea însă este o cifră cu valoare reală.

În unele cazuri zeroul ca valoare reală se poate găsi şi la sfîrşitul numărului; de exemplu, rotunjind numărul 2,540002 obţinem 2,54000, în care toate zerourile de la capăt sînt cifre cu valori reale, pentru că arată lipsa unor unităţi în categoriile respective. De aceea, dacă în condiţiile indicate într-o problemă sau într-o tabelă întîlnim numerele 4,0 sau 0,80, atunci trebuie să le privim ca pe nişte numere formate din două cifre. Rotunjind numărul 289,9 la 290, obţinem de asemenea la sfîrşitul numărului un zero care are valoare reală.

ADUNAREA ŞI SCĂDEREA NUMERELOR APROXIMATIVE

Rezultatul obţinut prin adunarea sau scăderea unor numere aproximative nu trebuie să se termine cu cifre cu valoare reală, în unităţi de acele ordine care lipsesc cel puţin într-unul din numerele respective. Dacă s-au obţinut astfel de cifre, atunci ele trebuie neglijate prin rotunjire:

3400	28,3	176,3
+ 275	+ 146,85	— 0,46
3 700	108	175,8
	283	
(şi nu 3 675)	(şi nu 283,15)	(şi nu 175,84)

Nu este greu de înțeles pe ce se bazează această regulă. Presupunem că se cere să se adauge la 3 400 m încă 275 m. Evident, la numărul 3 400 persoana care a executat măsurătorile a neglijat zecile de metri; este clar că adăugînd la acest număr 70 de metri și încă 5 metri, vom obține nu 3 675 m, ci mai curînd un rezultat cu alte cifre în locul zecilor și al unităților. De aceea, în locul zecilor și unităților vom scrie în sumă zerouri, care în cazul de față arată că nu se știe care anume cifre trebuie să stea aici.

ÎNMULȚIREA, ÎMPĂRȚIREA ȘI RIDICAREA LA PUTERE A NUMERELOR APROXIMATIVE

Rezultatul obținut prin înmulțirea și împărțirea numerelor aproximative nu trebuie să cuprindă mai multe cifre cu valori reale decît avem în factorul care cuprinde cele mai puține cifre cu valori reale. (Dintre două numere cel mai „scurt" este acela care conține mai puține cifre cu valori reale.) Cifrele în plus se înlocuiesc cu zerouri.

E x e m p l e :

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 245 \\ \hline 9\,100 \end{array}$$

(și nu 9 065)

$57{,}8 : 3{,}2 = 18$ (și nu 18,06);
$25 : 3{,}14 = 8{,}0$ (și nu 7,961)

La numărarea cifrelor nu se ține seama de virgulă; astfel, 4,57 se consideră drept un număr de trei cifre etc.

Numărul cifrelor cu valoare reală cuprins în puterea numărului aproximativ nu trebuie să depășească numărul lor cuprins în baza puterii. Cifrele în plus se înlocuiesc cu zerouri.

E x e m p l e :

$157^2 = 24\,600$ (și nu 24 649);
$5{,}81^3 = 196$ (și nu 196,122941)

Aceste reguli se referă numai la rezultatele finale. Dacă prin operaţia efectuată calculul nu se termină încă, atunci în rezultatul acestei operaţii intermediare se reţine cu o cifră de valoare reală mai mult decît cere regula. Efectuînd, de exemplu, operaţia:

$$\frac{36 \times 1{,}4}{3{,}4}$$

se procedează în felul următor:

$36 \times 1{,}4 = 50{,}4$ (se reţin trei cifre şi nu două);
$50{,}4 : 3{,}4 = 15$

La calculele tehnice simple regulile de mai sus sînt utilizabile aproape în toate cazurile, folosindu-se următoarele simplificări. Înainte de a începe calculul se stabileşte în funcţie de numărul de cifre cu valori reale ale factorului cel mai „scurt", cîte cifre cu valoare reală poate conţine rezultatul final. După aceasta se trece la calcule, reţinîndu-se în toate operaţiile intermediare cu o cifră mai mult decît urmează a se reţine pentru rezultatul final. Dacă, de exemplu, prin condiţiile problemei s-au dat cîteva numere de trei cifre cu valori reale şi un număr de două cifre cu valori reale, atunci rezultatul final va avea două cifre sigure, iar rezultatele intermediare trebuie să conţină trei cifre.

Astfel la efectuarea lucrărilor toate regulile calculelor aproximative pot fi reduse la următoarele două:

1) se stabileşte cîte cifre cu valori reale se cuprind în factorul cel mai scurt al problemei respective; tot atîtea cifre cu valori reale trebuie menţinute în rezultatul final;

2) în rezultatele tuturor operaţiilor intermediare se reţine cu o cifră mai mult decît s-a stabilit pentru rezultatul final[1].

[1] Vezi mai amănunţit în broşura mea „Tabele şi reguli pentru calcule" (OGHIZ, 1931).

Celelalte cifre în toate cazurile se înlocuiesc cu zerouri, și se neglijează după regulile rotunjirii.

Aceste reguli nu se aplică la problemele rar întîlnite pentru a căror rezolvare urmează să se efectueze numai operațiile de adunare și scădere. În aceste cazuri se respectă o altă regulă.

Rezultatul final nu trebuie să conțină cifre cu valori reale în acele ordine care lipsesc cel puțin într-una din datele aproximative. În rezultatele intermediare trebuie să se rețină cu o cifră, de valoare reală, mai mult decît s-a stabilit pentru rezultatul final. Celelalte cifre se neglijează prin rotunjire.

Dacă, de exemplu, datele problemei sînt următoarele:

$$37{,}5\text{ m},\quad 185{,}64\text{ m},\quad 0{,}6725\text{ m}$$

și pentru rezolvare se cere să se scadă primul număr din suma celorlalte două, atunci, în sumă

$$\begin{array}{r} 185{,}64 \\ +\ \ 0{,}6725 \\ \hline 186{,}3125 \end{array}$$

se neglijează ca într-un rezultat intermediar ultima cifră (adică se ia 186,312), iar în diferența

$$\begin{array}{r} 186{,}312 \\ -\ \ 37{,}5 \\ \hline 148{,}812 \end{array}$$

ca rezultat final se reține numai 148,8.

ECONOMISIREA EFORTULUI LA CALCULE

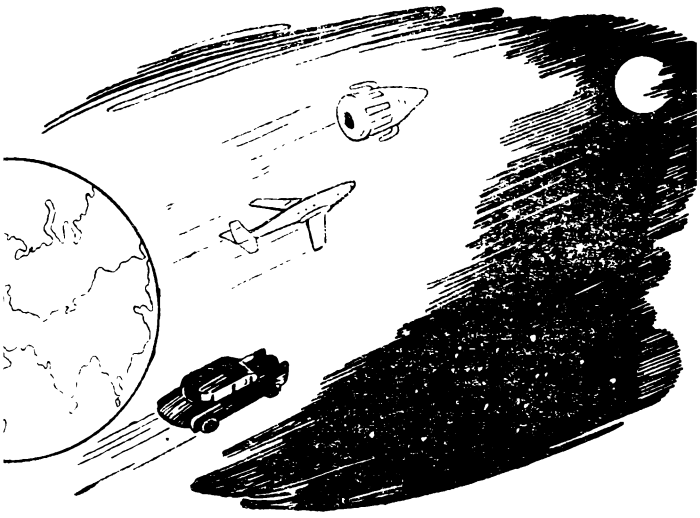
Cum putem calcula ce efort economisim noi la efectuarea calculelor prin metodele expuse mai sus? Pentru aceasta trebuie să facem un calcul oarecare complicat de două ori: o dată folosind regulile aritmetice obișnuite, iar a doua oară — aproximativ. Apoi se va cal-

cula cu răbdare de cîte ori am fost nevoiți să adunăm, să scădem și să înmulțim diferitele cifre prin cele două metode. Se va constata că prin calculul aproximativ se fac de două ori și jumătate mai puține operații decît la calculul „precis". Rezultatul obținut prin acest calcul este aproape tot atît de corect.

Astfel, pentru calculele aproximative este necesar de aproximativ două ori și jumătate mai puțin timp decît la calculul efectuat conform regulilor obișnuite. Dar nu numai atît: fiecare operație efectuată în timpul calculului, fiecare caz de adunare, scădere sau înmulțire a cifrelor este un prilej în plus de a face greșeli. La calculele aproximative probabilitatea greșelii va fi și ea de $2\frac{1}{2}$ ori mai mică decît la calculele „exacte". Este de ajuns să greșim o singură dată și calculele trebuie efectuate din nou, dacă nu chiar complet, măcar în parte. Prin urmare, prin metoda calculului aproximativ se obține o economie de timp mai mare decît $2\frac{1}{2}$ ori. Vedem, deci, că timpul consumat pentru cunoașterea regulilor acestui calcul este compensat repede și cu prisosință.

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 98\frac{3}{6} + 1\frac{27}{54} \\ 94\frac{1}{2} + 5\frac{38}{76} \end{cases}$$



CAPITOLUL IX

URIAȘII NUMERICI

CÎT DE MARE ESTE MILIONUL?

Vom începe cu milionul. Cuvîntul „milion" înseamnă o mie de mii. În secolul al XIII-lea, cunoscutul călător Marco Polo a vizitat China și pentru a exprima imensele bogății ale acestei țări a inventat cuvîntul „milion".

Dacă vreți să vă dați seama de adevăratele dimensiuni ale milionului, încercați să faceți pe un caiet curat un milion de puncte. Eu nu vă sfătuiesc să duceți această muncă pînă la capăt. Nu știu dacă va avea cineva răbdare s-o facă, dar chiar de la începutul acestei lucrări, datorită mersului ei încetinit, vă veți da seama ce este un milion „adevărat".

Naturalistul englez A.R. Wallace acorda o foarte mare importanță formării unei noțiuni juste despre milion. El propunea[1] „ca în fiecare școală mare să se rezerve o cameră sau o sală pe ai cărei pereți să se poată arăta, în mod demonstrativ, ce este un milion. În acest scop sînt necesare o sută de foi patrate mari de hîrtie de cîte $4\frac{1}{2}$ picioare fiecare, care se împart în pătrățele de cîte un sfert de țol, lăsîndu-se un număr egal de intervale albe între petele negre. După fiecare zece pete trebuie să existe un interval dublu pentru a separa fiecare sută de pete (10×10). Astfel, pe fiecare foaie vor apare cîte 10 mii de pete negre, care se disting bine în mijlocul camerei, iar toate cele o sută de foi vor conține un milion de pete. O astfel de sală ar fi fost foarte instructivă... Nimeni nu poate aprecia realizările științei moderne, care are de-a face cu valori neobișnuit de mari sau mici, dacă nu știe să-și imagineze clar cît de mare este un milion. În orice caz este de dorit ca în fiecare oraș mare să fie amenajată o astfel de sală, pe ai cărei pereți să se arate cît de mare este un milion"[2]

Nu știu dacă dorința lui Wallace a fost îndeplinită în patria lui, dar eu am reușit să realizez această propunere la Leningrad în Parcul central de cultură și odihnă. Aici, în pavilionul special amenajat de știință distractivă s-au trasat pe tavan un milion de cercuțe negre. Cîmpul vast de puncte negre producea asupra vizitatorilor o impresie puternică și-i făcea într-adevăr să simtă imensitatea milionului. Impresia era intensificată prin compararea acestei mulțimi cu o altă mulțime — cu numărul stelelor ce pot fi văzute pe cer cu ochiul liber, care din timpurile cele mai vechi fusese considerată ca imposibil de numărat. Contrar convingerii atît de răspîndite, ochiul liber vede pe o emisferă a cerului de noapte numai $3\frac{1}{2}$ mii de stele. Acest nu-

---

[1] În cartea „Poziția omului în univers".

[2] De exemplu, în astronomie distanțele dintre planete se măsoară în sute de milioane de km; distanțele pînă la stele sînt de milioane de milioane de km; în fizică numărul de molecule dintr-un cm^3 de aer reprezintă milioane de milioane de milioane.

măr este de 300 ori mai mic decît un milion. Un cerc mic albastru, trasat pe tavanul pavilionului despre care am vorbit mai sus, conţinea 3 500 de puncte întunecate şi reprezenta cerul înstelat, subliniind prin dimensiunile sale modeste imensitatea adevăratului uriaş numeric — milionul.

Cititorul va dori, probabil, să afle în ce fel s-au schiţat pe tavan un milion de cerculeţe negre. Cît timp le-a trebuit zugravilor să execute această lucrare migăloasă? Pavilionul nu ar fi fost gata prea repede dacă milionul de puncte de pe tavanul lui ar fi fost făcut manual. Lucrurile s-au petrecut mult mai simplu: s-au comandat tapete cu aşezarea respectivă a cerculeţelor şi au fost lipite de tavan.

UN MILION DE PINIOANE

Cu totul altfel este reprezentată mărimea unui milion în Casa de ştiinţă distractivă din Leningrad. Aici, milionul este realizat cu ajutorul unui mic dispozitiv, pe care-l reprezentăm în figura 52. Un rînd de roţi dinţate este astfel ales şi legat în acest dispozitiv, încît atunci cînd manivela se roteşte de zece ori acul primului cadran face o singură rotaţie. Cînd manivela este învîrtită de 100 de ori, acul acestui cadran va parcurge de 10 ori cercul şi totodată acul cadranului vecin va face o rotaţie. Pentru ca să se rotească acul cadranului al treilea manivela dispozitivului trebuie să fie învîrtită de o mie de ori. După zece mii de rotaţii ale manivelei se va roti o dată şi acul celui de-al patrulea cadran; după o sută de mii — se va roti acul al cincilea şi, în sfîrşit după un milion de rotaţii se va roti o dată ultimul ac, ca cel al cadranului al şaselea.

În timp ce milionul de cerculeţe de pe tavan frapează văzul, acest dispozitiv acţionează asupra muşchilor. Rotind manivela şi urmărind cît de încet se mişcă acele de pe ultimele cadrane, simţim parcă direct, cu mîinile noastre, greutatea celor 6 zerouri care însoţesc unitatea la reprezentarea milionului. Doar pentru

a ajunge la cel de-al şaselea zero trebuie să învîrtim manivela dispozitivului fără odihnă şi fără opriri aproape 11 zile şi nopţi (considerînd cîte o rotaţie pe secundă).

UN MILION DE SECUNDE

Aici propun o metodă accesibilă fiecăruia pentru a-şi forma o noţiune cît mai clară despre mărimea unui milion. Pentru aceasta trebuie să ne străduim doar să numărăm pînă la un milion unele unităţi mici, dar care ne sînt bine cunoscute — paşi, minute, chibrituri, pahare etc. Rezultatele obţinute sînt adesea neaşteptate şi uimitoare.

Dăm cîteva exemple.

Cît timp v-ar fi luat numărarea unui milion de obiecte oarecare, cîte unul în fiecare secundă?

Se constată că numărînd fără întrerupere cîte zece ore din cele 24, v-ar fi trebuit o lună de zile. Nu este de loc greu să constatăm acest lucrul făcînd următorul

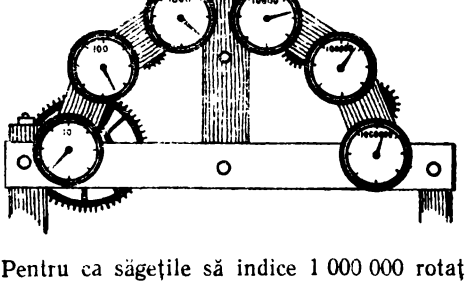


Fig. 52 — Pentru ca săgeţile să indice 1 000 000 rotaţii, **trebuie** să rotim manivela aparatului 11 zile şi nopţi.

calcul: Într-o oră sînt 3 600 secunde, iar în 10 ore — 36 000; prin urmare, în 3 zile veţi număra aproximativ 100 000 obiecte; deoarece milionul este de 10 ori mai mare vă vor trebui 30 de zile[1]. De aici rezultă

[1] Arătam cu titlu informativ că un an (astronomic) are 31 558 150 de secunde; 1 milion de secunde este egal cu 11 zile şi nopţi, 13 ore, 46 minute, 40 secunde.

că munca propusă mai sus — de a pune pe caiet un milion de puncte — ar fi cerut multe săptămîni de activitate asiduă și neobosită.

Măsura în care oamenii sînt înclinați să subaprecieze mărimea unui milion este arătată de însăși eroarea făcută de Wallace: prevenindu-i pe ceilalți de a nu subaprecia milionul, el termină fragmentul dat mai sus (pag. 172) cu următorul sfat:

„Pe scară redusă fiecare poate face acest lucru pentru el însuși: este suficient să facă rost de 100 de foi de hîrtie groasă, să le linieze în pătrățele și să pună puncte negre mari. Această reprezentare ar fi foarte instructivă, deși, desigur, nu în aceeași măsură cu cea realizată pe scară mare". Respectivul autor presupunea, bănuiesc, că această lucrare poate fi ușor îndeplinită de un singur om.

O BANDĂ DINTR-UN MILION DE FIRE DE PĂR

Toți văd și știu bine cît de subțire este un fir de păr. Grosimea unui fir de păr la om este de cca. 0,07 mm. O vom rotunji pînă la 0,1 mm. Imaginați-vă că ați pus, unul lîngă altul, un milion de fire de păr. Ce lățime ar fi avut o astfel de bandă. Am fi putut-o, de exemplu, întinde de-a latul ușii?

Dacă nu v-ați pus niciodată această problemă, atunci puteți fi siguri că înainte de a efectua calculele veți da un răspuns cu totul greșit. Poate chiar nu veți fi de acord cu răspunsul corect, atît de neverosimil va părea el. Care este acest răspuns?

Se constată că lățimea unei benzi formate dintr-un milion de fire de păr ar fi atins aproximativ 100 de metri. Această bandă n-ar putea fi întinsă nici chiar de la o margine la cealaltă a unei străzi largi de capitală!

Pare neverosimil, însă faceţi calculul şi vă veţi convinge că am dreptate:

$$0{,}1 \text{ mm} \times 1\,000\,000 = 0{,}1 \text{ m} \times 1\,000 = 0{,}1 \text{ km} = 100 \text{ m}^1$$

EXERCIŢII CU MILIONUL

Efectuaţi — oral — încă o serie de exerciţii pentru a vă da seama şi mai bine ce mărime reprezintă un milion.

1. Lungimea unei muşte obişnuite este de cca. 7 mm. Care ar fi fost lungimea ei dacă ar fi crescut de un milion de ori?

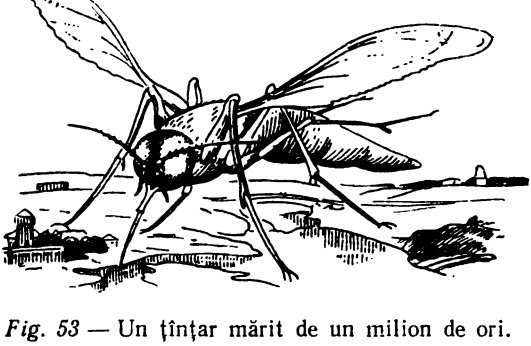


Fig. 53 — Un ţînţar mărit de un milion de ori.

R e z o l v a r e . Înmulţim 7 mm cu 1 000 000 şi obţinem 7 km, adică aproximativ lăţimea unui oraş mare. Prin urmare, o muscă ale cărei dimensiuni liniare au fost mărite de un milion de ori ar fi putut acoperi cu corpul său întregul oraş. Chiar un ţînţar mărit de un milion de ori ar fi apărut foarte impunător (vezi fig. 53).

---

[1] Aici înmulţirea s-a făcut în felul următor: în loc să înmulţim numerele am înlocuit unitatea de măsură cu alta de o mie de ori mai mare. Această metodă este foarte comodă pentru calculele orale şi trebuie folosită la calcule cu unităţi de măsură metrice.

2. Imaginaţi-vă că ceasul dumneavoastră de buzunar a crescut de un milion de ori (în lăţime), şi veţi obţine din nou un rezultat uimitor; nu cred că veţi reuşi să-l ghiciţi fără calcule. Care este rezultatul?

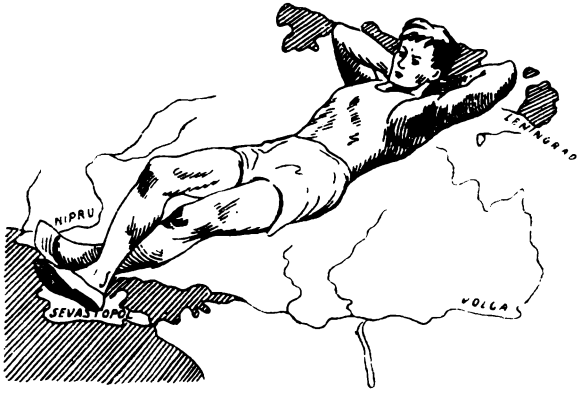


Fig. 54 — Omul mărit de un milion de ori ar ajunge de la golful finlandez pînă în Crimeea.

Rezolvare. Ceasul ar fi avut o lăţime de 50 km, iar fiecare cifră a lui ar fi atins mărimea unei mile geografice (7 km).

3. Ce statură ar fi avut omul dacă ar fi fost de un milion de ori mai înalt decît în mod obişnuit?

Rezolvare. 1 700 km. El ar fi fost de numai 8 ori mai mic decît diametrul globului terestru. Făcînd un pas, el ar fi putut ajunge din Leningrad la Moscova; dacă s-ar fi culcat (fig. 54), capul ar fi fost lîngă golful finlandez, iar picioarele în Crimeea...

Voi da încă cîteva exemple de acelaşi gen, lăsînd la latitudinea cititorului verificarea lor.

Făcînd un milion de paşi într-o direcţie v-aţi depărta cu 600 de km. De la Moscova pînă la Leningrad sînt un milion şi ceva de paşi.

Un milion de oameni aşezaţi în rînd, umăr la umăr, ar fi ocupat 250 km.

Un milion de puncte tipografice — ca în această carte — aşezate unul lîngă altul, ar fi format o linie cu lungimea de 100 metri.

Turnînd apă de un milion de ori cu degetarul, veţi turna aproape o tonă de apă.

O carte de un milion de pagini ar avea o grosime de circa 50 m.

Un milion de litere alcătuiesc o carte de 600-800 pagini de format mediu.

Un milion de zile formează peste 27 de secole. De la începutul erei noastre nu au trecut încă un milion de zile!

Făcînd aceste exerciţii cu milionul, putem aprecia calea imensă pe care a parcurs-o cel de-al treilea satelit artificial al pămîntului, lansat de Uniunea Sovietică la 15 mai 1958. Numai într-un an el a ocolit Pămîntul de aproape 5 100 ori, parcurgînd un drum care depăşeşte 230 de milioane de km. Aceasta este 1 $\frac{1}{2}$ ori distanţa pînă la Soare. Dacă cercetaşul acesta cosmic ar fi făcut cursă între Pămînt şi Lună, atunci într-un an el ar fi realizat 300 de drumuri![1]

Pentru comparaţie vom arăta că avionul TU-104, avînd o viteză medie de zbor de 800 km pe oră, ar fi putut parcurge această distanţă numai în 32 de ani şi 9 luni de zbor neîntrerupt. Dacă se consideră în medie viteza de mişcare a automobilului egală cu 80 km pe oră, rezultă că el ar străbate o asemenea cale numai în 330 de ani.

DENUMIREA URIAŞILOR NUMERICI

Am discutat pînă acum despre milioane. Înainte de a trece la uriaşi numerici mai mari, ne vom opri asupra denumirilor, adoptate în ţara noastră şi într-o serie de alte ţări.

---

[1] În medie distanţa de la Pămînt pînă la Soare este egală cu 150 milioane de km, iar de la Pămînt la Lună cu 384 400 km.

La începutul cărții am vorbit despre ordinele și clasele sistemului nostru de numerație zecimal pozițional. La cele spuse acolo vom adăuga că un milion este o mie de mii, adică o unitate de clasa a treia. După aceea urmează zecile și sutele de milioane. O mie de milioane formează o unitate din clasa a patra, numită miliard. Uneori miliardul este numit bilion, însă la noi nu se obișnuiește această denumire. Prin urmare, un miliard este egal cu o mie de milioane. El se scrie astfel:

1 000 000 000

adică 1 însoțit de 9 zerouri.

O mie de miliarde formează o unitate de clasa a cincea, care poartă denumirea de trilion. Astfel, un trilion este egal cu un milion de milioane și se scrie sub forma unei unități urmate de 12 zerouri:

1 000 000 000 000

Dacă vă interesează denumirile ultrauriașilor care urmează după trilion, puteți studia tabela de mai jos:

Denumirea uriașului numeric	De cîte zerouri este urmată unitatea
cvadrilion	15
cvintilion	18
sextilion	21
septilion	24
octilion	27
nonilion	30
decilion	33
undecilion	36
dodecilion	39

Mai departe nu există denumiri. De fapt nici acestea nu se folosesc aproape de loc, și sînt puțini cei care le cunosc.

În unele țări se obișnuiește o altă ordine a denumirii claselor, astfel încît denumirile claselor care coincid cu cele adoptate la noi au acolo un alt sens. Așa de pildă, prin cuvîntul bilion nu se înțelege o mie, ci un milion

de milioane, adică o unitate urmată de 12 zerouri; prin trilion se înțelege o unitate urmată de 18 zerouri, adică un milion de milioane de milioane, iar cvadrilionul este o unitate cu 24 de zerouri, adică un milion de milioane de milioane de milioane. Mai scurt, în aceste țări fiecare denumire superioară se dă unui milion din cele inferioare (și nu o mie ca la noi). Pentru a evita neînțelegerile trebuie să însoțim întotdeauna denumirea cu cifre. S-ar putea ca acesta să fie unicul caz din practică cînd notarea sumei cu litere nu explică, ci, dimpotrivă, induce în eroare cu privire la cifrele scrise.

Trebuie să menționăm că în cărțile științifice și în practică s-a adoptat o metodă de notare a uriașilor numerici care exclude cu desăvîrșire orice posibilitate de dublă interpretare. Această metodă se bazează pe ridicarea la putere. De exemplu, un trilion, adică o unitate urmată de 12 zerouri, reprezintă numărul 10 înmulțit de 12 ori. Pe scurt, aceasta se scrie:

$$1\,000\,000\,000\,000 = 1 \times 10^{12}$$

adică un trilion este o unitate înmulțită cu 10 ridicat la puterea a 12-a.

Mai dăm un exemplu. Numărul 2 cvadrilioane 400 trilioane se va scrie prescurtat astfel: $2{,}4 \cdot 10^{15}$, pentru că un cvadrilion este o unitate cu 15 zerouri (vezi tabela de mai sus).

Folosind o astfel de metodă pentru notarea numerelor foarte mari, întîlnite adesea în fizică și astronomie, se face economie de loc și, afară de aceasta, se ușurează citirea precum și diferitele operații efectuate cu ele[1].

MILIARDUL

Miliardul este una din denumirile cele mai tinere ale numerelor. Ea a intrat în uz numai spre sfîrșitul războiului franco-prusac (1871), cînd francezii au fost nevo-

[1] Vezi despre aceasta mai amănunțit în cartea: I. I. Perelman, „Algebra distractivă", Ed. științifică, 1961.

iți să plătească Germaniei o contribuție de 5 000 000 000 franci. Ca și milionul, cuvîntul miliard provine de la rădăcina „mile" (mie) și este un superlativ italian al acestui substantiv.

Pentru a ne face o idee despre imensitatea miliardului, să ne gîndim că în cartea pe care o citiți acum sînt ceva mai mult de 300 000 de litere. În trei cărți de acest fel vom avea un milion de litere. Un miliard de litere se vor cuprinde în 3 000 de exemplare ale acestei cărți, care dacă ar fi așezate unul peste celălalt ar forma o coloană de înălțimea Muzeului de ateism din Leningrad (fost catedrala Isaakievski).

Un metru cub conține exact un miliard de mm cubi. (1 000 × 1 000 × 1 000). Să încercăm să calculăm înălțimea coloanei care s-ar obține, dacă toate aceste cuburi milimetrice minuscule ar fi așezate unul peste celălalt. Rezultatul este uimitor — 1 000 km!

Un miliard de minute formează peste 19 secole; numai cu aproximativ 50 de ani în urmă (29 aprilie 1902, ora 10 și 40 minute) am intrat în cel de-al doilea miliard de minute de la începutul erei noastre.

Uriașul numeric miliard îl putem găsi și în interiorul corpului nostru. Cea mai mică înțepătură în orice parte a corpului provoacă apariția sîngelui. V-ați pus vreodată întrebarea: cîte vase sanguine extrem de mici, așa-zise capilare, există în corpul nostru? S-a arătat că în corpul omului există peste 100 de miliarde de capilare. Lungimea lor totală atinge 60—80 de mii de km. Cu un fir format din capilarele omului s-ar putea înconjura Pămîntul aproape de două ori de-a lungul ecuatorului.

TRILIONUL

Este greu să ne dăm seama de imensitatea acestui uriaș numeric, chiar dacă sîntem obișnuiți cu mînuirea milioanelor. Milionul este un pitic față de imensul trilion, așa cum este unitatea în comparație cu milionul.

De obicei noi uităm de acest raport și în imaginația noastră nu facem o deosebire prea mare între milion și trilion. Tot așa, pentru popoarele primitive care nu știu să numere decît pînă la 2 sau 3, toate numerele mai mari decît acestea sînt notate cu m u l t .

Și, după cum botocuzilor[1] le apare neesențială diferența mică între numerele 2 și 3, multor oameni contemporani, deși culți, li se pare ca neesențială deosebirea dintre milion și trilion. Cel puțin ei nu se gîndesc la faptul că unul din aceste numere este de 1 milion de ori mai mare decît celălalt și, prin urmare, raportul dintre ele este aproximativ același ca și dintre distanța Moscova — San Francisco și lățimea unei străzi.

Un fir de păr a cărui grosime ar fi mărită de un trilion de ori, ar fi de vreo 8 ori mai gros decît globul terestru, iar o muscă mărită tot de atîtea ori, ar avea o grosime de 70 de ori mai mare decît cea a Soarelui.

În anul 1958, în U.R.S.S. au apărut 1,1 miliarde de cărți. Dacă se consideră că în medie fiecare carte conține 160 000 de litere (acesta este aproximativ numărul de litere care se cuprinde în 80 de pagini cu formatul cărții de față), atunci numărul literelor din toate aceste exemplare va fi aproximativ egal cu 150 de trilioane. Așezate una lîngă cealaltă, literele ar alcătui un fir care s-ar putea întinde de la Pămînt pînă la Soare.

Circulația de transport va constitui în U.R.S.S. în anul 1965 2,5 trilioane de tone-km. Aceasta înseamnă că pe toate tipurile de transport s-ar putea transporta în anul 1965 mărfuri de 16,5 mii de tone la o distanță care să fie egală cu cea de la Pămînt pînă la Soare.

NUMERELE ULTRAURIAȘE

În „Aritmetica" veche (sec. XVIII) a lui Magnițki- despre care am mai vorbit, este dat un tabel al denu,

[1] Botocuzii sînt un trib indian din Brazilia, în prezent aproape în întregime exterminat.

mirilor pentru clasele de numere pînă la cvadrilion, adică pînă la unitatea cu 24 de zerouri[1].

Acesta a fost un mare pas înainte în comparaţie cu inventarul numeric mai vechi al înaintaşilor noştri. Scara slavă a numerelor mari era pînă în sec. al XV-lea mult mai modestă şi ajungea abia la 100 de milioane. Iată această numerotare veche:

„tîsiaşcea" 1 000
„tima" 10 000
„leghion 100 000
„leodr" 1 000 000
„vran" 10 000 000
„koloda" 100 000 000

Magniţki a lărgit mult în tabelul său limitele vechi ale numerelor mari. El a considerat însă că practic este inutil să continue prea mult sistemul de denumiri al uriaşilor numerici. Imediat după tabel se plasează cîteva versuri, în care bătrînul matematician afirmă că deoarece mintea omenească nu poate cuprinde şirul infinit de numere, este inutil să formeze numere mai mari decît cele notate în tabelul lui. Numerele din acest tabel (de la unitate pînă la septilion, adică pînă la $1 \cdot 10^{24}$ inclusiv) sînt suficiente, după părerea lui, pentru numărarea tuturor obiectelor lumii vizibile — pentru fiecare „care doreşte să numere ceva în profunzimile cerului".

Este interesant că şi astăzi tabelul lui Magniţki este aproape suficient pentru acei cercetători ai naturii care „au nevoie să numere ceva în profunzimea cerului". La măsurarea distanţelor pînă la astrele îndepărtate, abia vizibile cu ajutorul celui mai puternic telescop sau radiotelescop, astronomii n-au nevoie de denumiri care să depăşească miliarde. Corpurile cereşti cele mai îndepărtate se află la o distanţă de peste un miliard de

---

[1] Magniţki folosea acea clasificare a numerelor care dă cîte o denumire nouă pentru fiecare milion de unităţi inferioare (bilionul — un milion de milioane etc.).

În sistemul nostru de denumiri unitatea urmată de 24 de zerouri se numeşte septilion (vezi tabelul de la pag. 179). În cele ce urmează se foloseşte sistemul de numiri indicat în tabel.

„ani lumină“ de Pămînt. Chiar dacă am vrea să exprimăm această distanţă în cm, am obţine aproximativ 10 000 de septilioane; prin urmare, nici aşa nu ieşim din limitele tabelului lui Magniţki.

În lumea mărimilor foarte mici constatăm că de asemenea nu se face simţită nevoia de a folosi numere mai mari decît septilionul. Numărul de molecule dintr-un cm^3 de gaz — una din mulţimile cele mai mari calculate real — se exprimă în zeci de cvintilioane. Numărul oscilaţiilor pe secundă pentru undele electromagnetice, cele mai scurte din cîte sînt cunoscute în prezent, nu depăşeşte un sextilion, adică 1 10^{21}. Dacă ne-am pune în gînd să calculăm cîte picături se cuprind în ocean (considerînd că volumul unei picături este egal cu 1 mm^3, ceea ce este destul de puţin) tot nu ar fi nevoie de numere mai mari ca septilionul, pentru că am obţine cel mult mii de septilioane.

În cazul cînd am dori să exprimăm însă cîte grame de substanţă cuprinde întregul nostru sistem solar, atunci ne trebuie o denumire superioară septilionului, pentru că acest număr cuprinde 34 de cifre (2 urmat de 33 de zerouri): $2 \cdot 10^{33}$.

CEL CARE ÎNGHITE URIAŞII NUMERICI

Să ne oprim puţin asupra unui uriaş aritmetic (mai bine zis geometric) de un gen aparte — asupra milei cubice[1]. Noi ne reprezentăm destul de greu mărimile cubice; de obicei subestimăm mărimea lor — mai ales cînd este vorba despre unităţi de măsură mari cu care avem de-a face în astronomie. Dacă însă ne închipuim greşit mărimea unei mile cubice — cea mai mare unitate de măsură folosită de noi pentru volum — atunci cît de greşite trebuie să fie noţiunile pe care le avem cu privire la volumul globului pămîntesc, al celorlalte planete, al Soarelui. De aceea trebuie să acordăm puţin

[1] Aici se are în vedere mila geografică, care reprezintă a 15-a parte dintr-un grad ecuatorial şi măsoară 7 420 m.

timp şi atenţie încercărilor de a căpăta imaginea corespunzătoare cu privire la mila cubică.

În cele ce urmează ne vom folosi de expunerea pitorească dată într-o cărticică aproape uitată, „O călătorie fantastică prin Univers“ (apărută cu circa 100 de ani în urmă).

„Presupunem că pe o şosea dreaptă putem vedea pînă la o distanţă de o milă întreagă ($7^1/_2$ m). Să facem un catarg cu lungimea de o milă şi să-l aşezăm la un capăt al drumului, lîngă un stîlp de telegraf. Ca să ne dăm seama cît de înalt este catargul, presupunem că lîngă el se află statuia unui om de aceeaşi înălţime cu catargul, adică de peste 7 km. Genunchiul acestei statui se va afla la o înălţime de 1 800 de m; ar trebui puse una peste alta 25 de piramide egiptene pentru a ajunge pînă la mijlocul statuii.

Să ne imaginăm acum că am aşeza două catarge cu înălţimea de o milă la distanţa de o milă unul de altul şi am unit aceste două catarge cu scînduri; s-ar fi obţinut un perete cu lungimea de o milă şi cu înălţimea tot de o milă. Aceasta este o milă patrată.

Am obţinut astfel un perete de lemn aşezat vertical. Să ne imaginăm că avem patru pereţi egali uniţi între ei în forma unei lăzi (fig. 55). Îi punem un capac de o milă lungime şi o milă lăţime. Această ladă va ocupa un volum egal cu o milă cubică. Să vedem cît este de mare o asemenea ladă, ce şi în ee cantitate poate încăpea în ea.

Ridicăm capacul şi începem prin a pune în ladă toate clădirile Leningradului. Ele vor ocupa foarte puţin loc. Plecăm la Moscova, adunînd din drum toate oraşele mari şi mici. Deoarece toate acestea au acoperit numai fundul lăzii, să căutăm material pentru umplerea ei şi în alt loc. Luăm Parisul, cu Arcul lui de Triumf şi Turnul Eifel şi le aruncăm tot acolo. Toate acestea zboară ca într-o prăpastie; aproape că nici nu se observă că am mai pus ceva. Adăugăm Londra, Viena, Berlinul. Dar cum toate acestea sînt încă puţin pentru a putea umple măcar în parte golul din ladă, vom începe să aruncăm, fără alegere, toate oraşele, cetăţile, castelele, satele, diferitele clădiri întîlnite în cale. Tot e puţin.

Adăugăm tot ce a fost făcut de mîinile omului în Europa; dar şi acum lada este umplută numai pe sfert. Aruncăm toate corăbiile din lume, dar şi asta fără folos. Vom pune toate piramidele egiptene, toate căile ferate din

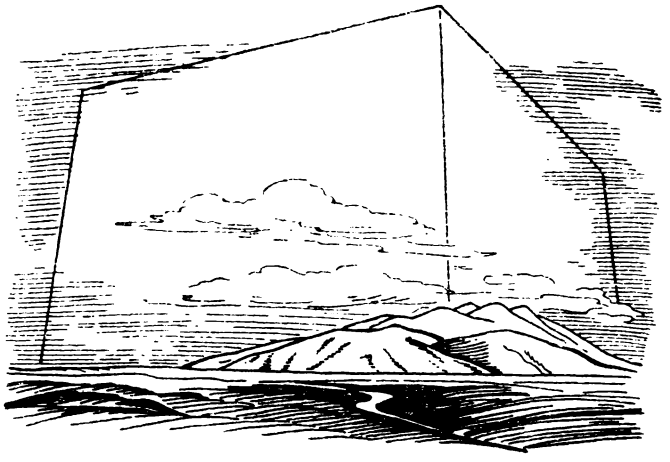


Fig. 55 — O ladă cu un volum de o milă geografică cubică ar cuprinde clădirile din lumea întreagă, flota tuturor ţărilor, toate maşinile şi construcţiile din cele cinci continente ale lumii, populaţia globului pămîntesc, toate animalele de pe planeta noastră şi tot nu ar fi umplută.

lumea veche şi nouă, toate maşinile şi fabricile din lume — tot ce a fost făcut de mîna omului în Asia, Africa, America, Australia. Lada se umple numai pînă la jumătate. O scuturăm puţin ca să se aşeze toate obiectele mai bine şi încercăm să completăm golul cu oameni.

Adunăm toate paiele şi tot bumbacul din lume şi-l aşezăm în ladă, obţinînd astfel un strat care să-i ferească pe oameni de loviturile inerente unei asemenea experienţe. Întreaga populaţie a Germaniei va încăpea în primul strat. O acoperim cu un strat moale de grosimea unui picior şi mai aşezăm tot atîţia oameni. Acoperim şi acest strat şi, aşezînd strat după strat, vom închide în ladă întreaga populaţie a Europei, Asiei, Africii, Americii, Australiei... S-au format astfel 50 de straturi;

considerînd că un strat are grosimea de un metru, în total 50 de metri. Ar fi trebuit de cîteva zeci de ori mai mulți oameni decît există pe lume pentru a putea umple cea de-a doua jumătate a lăzii...

Ce-i de făcut? Dacă am fi dorit să așezăm în ladă toate vietățile din lume — toți caii, boii, măgarii, berbecii, cămilele, iar peste ele să punem toate păsările, peștii, șerpii, tot ce zboară și se tîrăște — nici atunci n-am fi umplut lada pînă sus fără ajutorul stîncilor sau al nisipului.

Iată ce înseamnă o milă cubică. Iar din globul terestru s-ar putea face 660 de milioane de asemenea lăzi."

La cele spuse mai sus adăugăm că o milă cubică de boabe de grîu ar fi cuprins cîteva cvintilioane de astfel de boabe. După cum vedeți, acest uriaș cubic înghite toți ceilalți uriași[1].

URIAȘII TIMPULUI

Uriașele intervale de timp ne apar și mai puțin clare decît distanțele și volumele uriașe. Geologia ne învață că din timpul depunerii celor mai vechi straturi ale scoarței pămîntului, s-au scurs sute de milioane de ani. Cum să ne dăm seama de imensitatea unor perioade de timp atît de îndelungate? Un savant propune următoarea metodă:

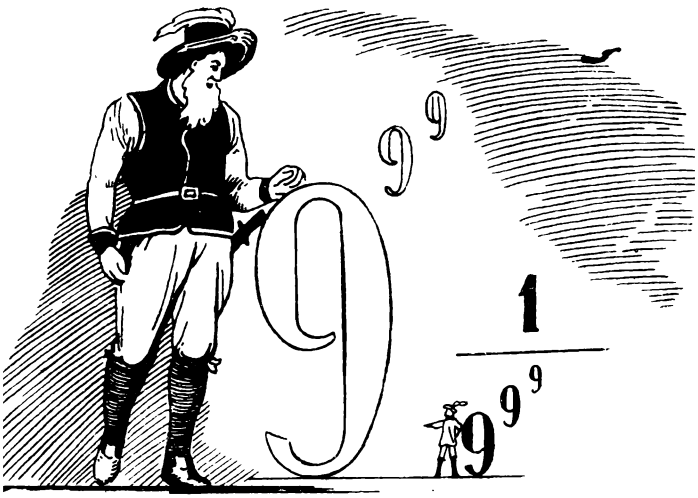
„Să ne imaginăm că întreaga istorie a Pămîntului poate fi reprezentată ca o linie dreaptă cu lungimea de 500 km. Presupunem că această distanță reprezintă cele 500 de milioane de ani care s-au scurs de la începutul epocii cambriene (una din epocile cele mai vechi din istoria scoarței Pămîntului). Deoarece 1 km reprezintă un milion de ani, ultimii 500 — 1 000 m vor corespunde duratei perioadei ghețarilor, iar cei 600 de ani ai istoriei mondiale vor fi de numai 6 m — lungimea unei

[1] Și totuși mila cubică pierde mult în ochii noștri, dacă se ține seama de faptul că întreaga cantitate de gaze ce urmează să se extragă în 1965 în U.R.S.S. ar ocupa peste o treime din volumul unei astfel de lăzi.

camere, în care cei 70 de ani de viață ai omului se pot reprezenta printr-o linie de 7 cm. Dacă vom sili un melc să parcurgă această distanță cu viteza normală, de 3,1 mm pe secundă, atunci pentru întreaga distanță i-ar trebui 5 ani. Iar întreaga perioadă de la începutul primului război mondial pînă în zilele noastre o va parcurge în 40 de secunde... Vedem deci cît de mici sînt, raportat la scara istoriei Pămîntului, acele perioade mici pe care omul le poate cuprinde cu mintea sa".

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$$100 = \begin{cases} 1\frac{6}{7} + 3 + 95\frac{4}{28} \\ 57\frac{3}{6} + 42\frac{9}{18} \end{cases}$$



CAPITOLUL X

PITICII NUMERICI

DE LA URIAŞI LA PITICI

În călătoriile sale Gulliver, părăsindu-i pe pitici, a nimerit printre uriaşi. Noi facem călătoria în sens invers: după ce am făcut cunoştinţă cu uriaşii numerici, trecem în lumea piticilor — a numerelor care sînt de atîtea ori mai mici ca unitatea, de cîte ori unitatea este mai mică decît uriaşul aritmetic.

Căutarea reprezentanţilor acestei lumi nu prezintă nici o greutate. Pentru aceasta este suficient să se scrie un şir de numere inverse milionului, miliardului, trilionului etc., adică să se împartă unitatea cu aceste numere. Fracţiile care se obţin:

$$\frac{1}{1\,000\,000},\ \frac{1}{1\,000\,000\,000},\ \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}\ \text{etc.}$$

sînt piticii numerici tipici, care sînt tot atît de mici în comparaţie cu unitatea, pe cît este de mică unitatea în comparaţie cu milionul, miliardul, trilionul şi cu ceilalţi uriaşi numerici.

După cum vedeţi fiecărui uriaş numeric îi corespunde un pitic numeric şi, prin urmare, pe lume nu există mai puţini pitici numerici decît uriaşi. Şi pentru reprezentarea lor s-a găsit o metodă de prescurtare. Am arătat mai înainte (pag. 180) că în lucrările ştiinţifice (de astronomie, fizică) numerele foarte mari se notează astfel:

$$\begin{aligned} 1\,000\,000 &\ldots\ldots 10^6 \\ 10\,000\,000 &\ldots\ldots 10^7 \\ 400\,000\,000 &\ldots\ldots 4 \cdot 10^8 \\ 6 \text{ cvadrilioane} &\ldots\ldots 6 \cdot 10^{15} \text{ etc.} \end{aligned}$$

În mod corespunzător piticii numerici se notează în felul următor:

$$\frac{1}{1\,000\,000} \ldots\ldots\ldots 10^{-6}$$

$$\frac{1}{100\,000\,000} \ldots\ldots\ldots 10^{-8}$$

$$\frac{3}{1\,000\,000\,000} \ldots\ldots\ldots 3 \cdot 10^{-9} \text{ etc.}$$

Există oare o necesitate reală de a folosi astfel de fracţii? Avem într-adevăr de-a face vreodată cu fracţii atît de mici ale unităţii? Este o problemă pe care credem că este interesant s-o discutăm mai amănunţit.

PITICII TIMPULUI

Este uşor de scris $\frac{1}{1\,000}$ secunde, şi s-ar părea că nu se poate petrece nimic într-un interval de timp atît de scurt.

Aşa îşi închipuie mulţi dintre dumneavoastră, dar într-o miime de secundă pot avea loc foarte multe fenomene.

Trenul care parcurge 36 km pe oră face pe secundă 10 m şi, prin urmare, într-o a mia parte din secundă reuşeşte să se deplaseze cu 1 cm. Sunetul se propagă în aer în decurs de o miime de secundă cu 33 cm, iar un glonte care părăseşte ţeava armei cu o viteză de 700—800 m/s parcurge în acelaşi interval de timp 70 cm. Globul pămîntesc se deplasează în fiecare miime de secundă, în rotaţia sa în jurul Soarelui, cu 30 m. O coardă care emite un sunet înalt face într-o miime de secundă 2—4 şi chiar mai multe oscilaţii complete; chiar şi ţînţarul reuşeşte să-şi ridice sau să-şi coboare aripioarele. Un fulger durează mult mai puţin decît o miime de secundă; în acest interval de timp reuşeşte să apară şi să înceteze (fulgerul se extinde pe o lungime de cîţiva km).

Vom spune că o miime de secundă nu poate fi considerată un pitic, aşa după cum nimeni nu va numi mia drept uriaş numeric. Dacă am lua însă o milionime de secundă, atunci am putea afirma că aceasta este o mărime ireală, un interval de timp în decursul căruia nu se poate întîmpla nimic? Nu! Chiar nici o milionime de secundă — de exemplu, pentru un fizician contemporan — nu este un interval de timp prea mic.

În domeniul fenomenelor luminoase (şi electrice) savantul are mereu de-a face cu fracţiuni mult mai mici de secundă. Amintim înainte de toate că o rază de lumină parcurge în fiecare secundă (în vid) 300 de mii de km; prin urmare, într-o milionime de secundă lumina se propagă la o distanţă de 300 m — aproximativ atît cît parcurge în aer sunetul în decurs de o secundă întreagă.

Dar lumina este un fenomen ondulatoriu şi numărul de unde luminoase care trec în fiecare secundă prin orice punct al spaţiului, ajunge la sute de trilioane. Acele unde luminoase care, acţionînd asupra ochiului nostru, provoacă senzaţia de lumină roşie, au o frecvenţă a oscilaţiilor de 400 trilioane pe secundă; aceasta înseamnă că într-o milionime de secundă în ochiul nos-

tru intră 400 de milioane de unde şi că o undă pătrunde în ochi într-un interval de timp de 400 000 000 000 000 ori mai mic decît o secundă. Iată un adevărat pitic numeric!

Şi acest pitic real este însă un adevărat uriaş în comparaţie cu fracţiuni şi mai mici de secundă, cu care are de-a face fizicianul în studiul razelor Roentgen. Razele Roentgen, care au proprietatea de a pătrunde prin multe corpuri opace, reprezintă, ca şi razele vizibile, un fenomen ondulatoriu, numai că la ele frecvenţa oscilaţiilor este mult mai mare decît la razele vizibile — ea atinge 2 500 trilioane pe secundă. Undele se succed aici de 60 de ori mai des decît la radiaţiile vizibile ale luminii roşii. Razele „gamma" au o frecvenţă şi mai mare decît razele Roentgen.

Deci, şi în lumea piticilor există uriaşi şi pitici proprii. Gulliver era mai înalt decît piticii numai de vreo 12 ori şi totuşi li se părea uriaş. Aici însă, un pitic este mai mare decît altul de vreo 60 de ori şi, prin urmare, are tot dreptul să se numească uriaş.

PITICII SPAŢIULUI

Acum este interesant de văzut care sînt distanţele cele mai mici măsurate şi evaluate astăzi de cercetătorii naturii.

În sistemul de unităţi metrice, unitatea de lungime cea mai mică folosită în mod curent este milimetrul, care este aproximativ de 2 ori mai mic decît grosimea unui băţ de chibrit. Pentru a măsura obiectele vizibile cu ochiul liber, această unitate de lungime este suficient de mică. Dar pentru măsurarea bacteriilor şi altor obiecte mici ce se pot distinge numai cu ajutorul microscoapelor puternice, milimetrul este prea mare. Pentru astfel de măsurători savanţii folosesc o unitate de măsură mai mică — micronul, care este de o mie de ori mai mic decît milimetrul. Globulele roşii, pe care le găsim cu zecile de milioane în fiecare picătură din sîngele nostru, au o lungime de 7 microni şi grosimea

de 2 microni. O stivă formată din o mie de asemenea globule are chiar grosimea unui chibrit.

Oricît de mic ni s-ar părea micronul, el este totuşi mare pentru distanţele pe care este nevoie să le măsoare un fizician al zilelor noastre. Particulele cele mai mici de molecule invizibile chiar cu microscopul, din care este formată substanţa tuturor corpurilor din natură, şi atomii încă şi mai mici, au dimensiuni cuprinse între a suta şi a mia parte dintr-un micron[1]. Dacă ne oprim asupra primei mărimi, a celei mai mari, constatăm că un milion de astfel de particule (iar noi ştim de acum cît de mare este milionul) aşezate pe o aceeaşi dreaptă, una lîngă alta, ar ocupa doar un mm!

Pentru a ne da seama cît de mic este atomul, să ne imaginăm următorul tablou. Închipuiţi-vă că toate obiectele de pe globul pămîntesc ar fi crescut de un milion de ori. În acest caz turnul Eifel (300 m înălţime) s-ar fi înălţat la 300 000 de km în spaţiul cosmic şi vîrful lui s-ar fi aflat în imediata vecinătate a orbitei Lunii. Oamenii ar fi avut o înălţime egală cu un sfert din raza globului pămîntesc — 1 700 km; un pas al unui astfel de om uriaş l-ar fi deplasat cu 600—700 km. Globulele roşii, care s-ar fi numărat cu miliardele în sîngele lui, ar fi avut un diametru de peste 7 m. Firul de păr ar fi ajuns la o grosime de 100 m. Lungimea unui şoarece ar fi atins 100 km, iar a unei muşte — 7 km.

Cît de mare ar fi fost în această situaţie un atom de substanţă?

Nici nu-ţi vine să crezi: dimensiunile lui ne vor apare sub forma... unui punct tipografic de mărimea celui din cartea de faţă!

Am atins oare în felul acesta limitele micimilor din spaţiu, care nu pot fi depăşite nici măcar de fizicianul care foloseşte metodele măsurătorilor celor mai fine? Pînă nu de mult aşa se credea. S-a demonstrat însă că atomul este o lume întreagă formată din particule mult mai mici şi serveşte drept arenă pentru acţiunea unor forţe mari. De exemplu, atomul de hidrogen este for-

[1] Cea mai mică unitate de lungime folosită în fizica modernă este „x"; el este egal cu a zecea milioana parte dintr-un micron.

mat dintr-un „nucleu" central şi din „electronul" care se roteşte repede în jurul lui. Fără a mai intra în alte amănunte vom spune că diametrul electronului se măsoară cu trilionimi de milimetru. Cu alte cuvinte, diametrul electronului este de aproape un milion de ori mai mic decît diametrul unui atom. Dacă doriţi însă să comparaţi dimensiunile electronului cu mărimea unui fir de praf, atunci calculele vă pot arăta că electronul este mai mic decît firul de praf de aproximativ tot atîtea ori de cîte ori firul de praf este mai mic decît globul pămîntesc!

Vedeţi, prin urmare, că atomul — acest pitic între pitici — este în acelaşi timp un adevărat uriaş în comparaţie cu electronul, care intră în componenţa lui, un uriaş de mărimea sistemului solar faţă de globul pămîntesc.

În acest sens se poate întocmi o scară instructivă, în care fiecare treaptă este un uriaş faţă de treapta precedentă şi un pitic în raport cu următoarea:

electronul
atomul
firul de praf
casa
globul pămîntesc
sistemul solar
distanţa pînă la Steaua polară
Calea Lactee

Fiecare termen din acest şir este de aproape un sfert de milion de ori[1] mai mare decît cel precedent şi tot de atîtea ori mai mic decît următorul. Nimic nu arată atît de clar caracterul relativ al noţiunilor de „mare" şi „mic" ca acest tabel. În natură nu există un obiect absolut mare sau absolut mic. Fiecare obiect poate fi imens şi infinit de mic, în funcţie de modul de a-l privi, de obiectul cu care este comparat.

---

[1] Se au în vedere dimensiunile liniare (nu volumele), adică diametrul atomului, diametrul sistemului solar, înălţimea sau lungimea casei etc. Pentru amănunte de acest gen vezi cartea mea „Cunoaşteţi oare fizica"?.

Discuţia noastră cu privire la uriaşi şi pitici din lumea numerelor ar rămîne incompletă, dacă nu am prezenta cititorului unul din lucrurile cele mai ciudate de acest gen, care, ce-i drept, nu este nou, dar face cît o duzină de noutăţi. Pentru început vom da următoarea problemă care la prima vedere pare foarte simplă:

Care este numărul cel mai mare ce poate fi scris cu ajutorul a trei cifre, fără a folosi nici unul din semnele operaţiilor?

Vă gîndiţi, desigur, la 999, dar nu este aceasta răspunsul; ar fi fost mult prea simplu. Răspunsul corect se scrie astfel:

$$9^{9^9}$$

Această expresie înseamnă „nouă la puterea a noua la puterea noua"[1]. Cu alte cuvinte, trebuie să calculăm un produs de atîţia de nouă cîte unităţi se obţin prin înmulţirea:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9$$

Este suficient să începem numai calculul pentru a ne da seama de imensitatea rezultatului care s-ar obţine. Dacă veţi avea răbdare să efectuaţi înmulţirea de mai sus obţineţi numărul:

387 420 489

De fapt, munca abia începe: trebuie să găsim acum

$$9^{387\,420\,489}$$

adică produsul a 387 420 489 de nouă. Prin urmare, rotunjit, înseamnă să facem 400 de milioane de înmulţiri...

Bineînţeles că nu veţi avea timp să duceţi pînă la capăt un asemenea calcul, iar eu sînt lipsit de posibi-

[1] În limbajul matematicii această expresie se numeşte „supraputerea a treia a lui nouă".

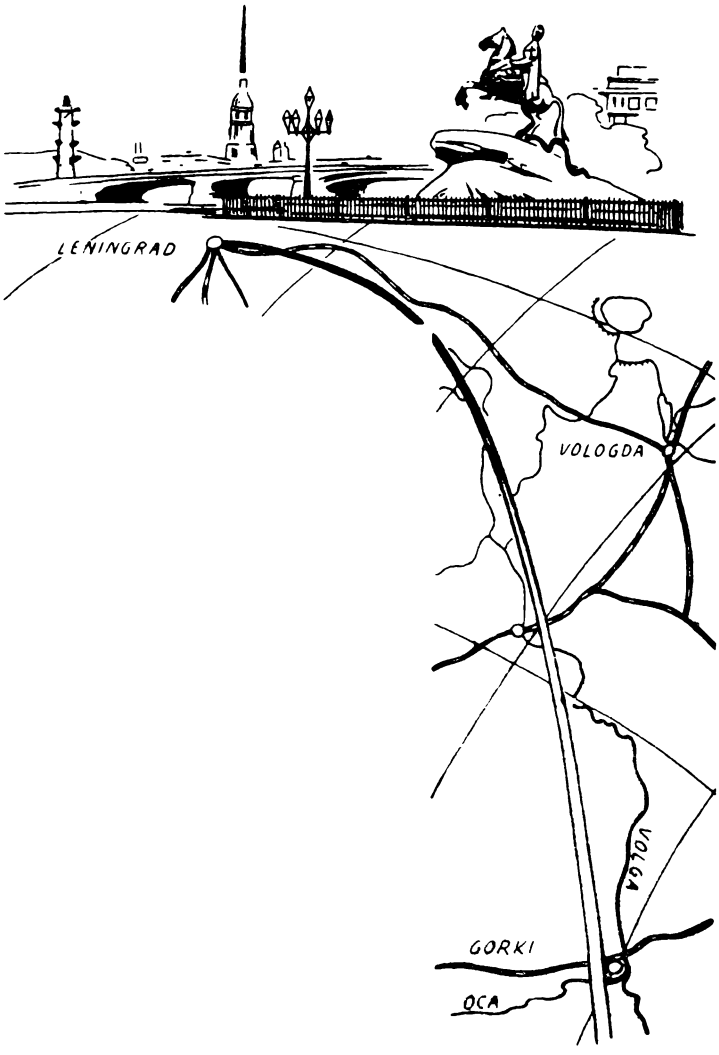


Fig. 56 — Numărul exprimat prin 9^{9^9} este format din 370 de milioane cifre. Dacă am scrie toate aceste cifre una lîngă alta pe o bandă de hîrtie, această bandă s-ar întinde pe 1 000 de km, de la Leningrad pînă la orașul Gorki.

litatea de a vă comunica rezultatul din trei cauze pe care sper că le veți considera temeinice. În primul rînd acest număr nu a fost calculat încă niciodată de nimeni (se cunoaște rezultatul aproximativ). În al doilea rînd, chiar dacă el ar fi fost calculat, atunci pentru a-l tipări ne-ar fi necesar cel puțin o mie de cărți ca cea de față, pentru că numărul este format din 369 693 061 cifre; culese cu litere de tipar obișnuite ele s-ar întinde pe o lungime de 1 000 km — de la Leningrad pînă la orașul Gorki. În sfîrșit, chiar dacă aș fi fost aprovizionat cu o cantitate suficientă de hîrtie și de cerneală, nici atunci nu v-aș fi putut satisface curiozitatea. Cred că vă dați seama de ce: să zicem că aș fi fost capabil să notez fără întrerupere cîte două cifre pe secundă, atunci într-o oră aș fi scris 7 200 de cifre; în 24 de ore, lucrînd neîntrerupt zi și noapte, aș înregistra cel mult 172 800 cifre. De aici rezultă că fără să părăsesc o clipă pana din mînă, muncind neobosit zi și noapte, mi-ar fi trebuit cel puțin șapte ani pentru a scrie acest număr.

Mă voi mulțumi să vă spun doar atît: numărul începe cu cifrele 428 124 773 175 747 048 036 987 118 și se termină cu 89. Ce se găsește între acest început și sfîrșit nu se știe.[1] În orice caz cuprinde 369 693 061 cifre!

Cît de mare trebuie să fie deci însuși numărul de obiecte exprimat prin acest șir lung de cifre? Este greu să dăm măcar o noțiune aproximativă cu privire la imensitatea lui, pentru că o astfel de mulțime de obiecte, considerînd chiar că fiecare electron este un obiect separat, nu există în întreg Universul!

Arhimede a calculat cîndva cîte fire de nisip ar fi existat în lume dacă întregul Univers, pînă la stelele fixe, ar fi fost umplut de nisipul cel mai fin. El a obținut un rezultat care nu depășea unitatea urmată de 63 de zerouri. Numărul nostru însă este format din 370 de milioane de cifre — prin urmare, cu mult mai mare decît numărul găsit de Arhimede.

---

[1] Începutul numărului este calculat cu ajutorul logaritmilor, iar sfîrșitul lui este determinat prin raționamente.

După ce am făcut cunoştinţă cu acest uriaş mascat să examinăm inversul lui.

$$9^{9^9}$$

Împărţind unitatea la acest număr vom obţine piticul numeric respectiv. Vom avea:

$$\frac{1}{9^{9^9}}$$

care este egal cu

$$\frac{1}{9^{387\,420\,489}}$$

La numitor se află numărul imens cu care am făcut cunoştinţă mai sus. Ultrauriaşul a fost transformat în ultrapitic.

Este necesar să facem o observaţie esenţială cu privire la uriaşul format din trei de nouă. Eu am primit multe scrisori de la cititorii mei, în care se afirmă că această expresie nu este chiar atît de greu de calculat; unii au efectuat calculele într-un timp relativ scurt. Rezultatul a fost însă mult mai modest decît acela despre care am vorbit eu. Într-adevăr, ei scriu că

$$9^9 = 387\,420\,489;$$

ridicînd 387 420 489 la puterea a noua, obţinem un număr format „numai" din 72 de cifre. Nici aceasta nu este puţin, dar pînă la 370 de milioane de cifre mai este departe...

Cititorii poate sînt nedumeriţi, dar greşeala constă în aceea că ei nu au înţeles just sensul expresiei în trei etaje formate din nouă. Ei consideră numărul:

$$(9^9)^9$$

în timp ce adevăratul înţeles este altul:

$$9^{(9^9)}$$

De aici provine diferența uriașă din rezultatele calculelor. Ambele posibilități de înțelegere duc la același rezultat într-un singur caz, și anume, cînd avem expresia

$$2^{2^2}$$

Aici nu mai are importanță cum se efectuează calculul: se obține tot 16.

Este interesant că expresia de mai sus nu indică numărul cel mai mare care poate fi scris cu ajutorul a trei de doi. Se poate obține un număr mult mai mare dacă cei trei de doi îi așezăm astfel:

$$2^{2^2}$$

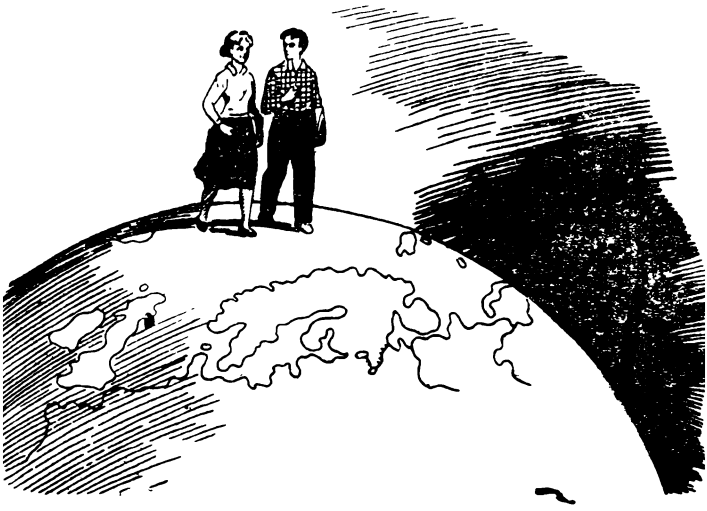
Această expresie este egală cu 4 194 304 și mult mai mare decît 16.

După cum vedeți, așezarea cifrelor în trei trepte nu exprimă totdeauna numărul cel mai mare care poate fi reprezentat cu ajutorul a trei cifre identice. (Despre aceasta se vorbește mai amănunțit în „Algebra distractivă", cap. I: „Cea de-a cincea operație matematică").

CURIOZITĂȚI ARITMETICE:

$2 \times 2 = 2 + 2$ $\qquad$ $11 \times 1{,}1 = 11 + 1{,}1$

$3 \times 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2}$ $\qquad$ $21 \times 1\frac{1}{20} = 21 + 1\frac{1}{20}$



CAPITOLUL XI

CĂLĂTORII ARITMETICE

CĂLĂTORIE ÎN JURUL LUMII

În tinerețe am lucrat la redacția unei reviste foarte răspîndite din Leningrad, al cărei secretar eram. Într-o zi mi s-a înmînat cartea de vizită a unui musafir. Am citit în ea o familie necunoscută și o profesie foarte neobișnuită: „primul călător rus care a făcut pe jos o călătorie în jurul lumii". În cadrul serviciului mi s-a întîmplat de multe ori să stau de vorbă cu călători care au vizitat diferite continente și chiar cu oameni care au întreprins călătorii în jurul lumii. Dar despre cel care a făcut pe jos o călătorie în jurul lumii eu nu auzisem încă. M-am grăbit să ies în sala de primire pentru a face cunoștință cu acest om neobosit.

Vizitatorul era tînăr şi avea o înfăţişare foarte modestă. La întrebarea mea, cînd a reuşit să întreprindă această călătorie neobişnuită, „primul călător rus... în jurul lumii" mi-a explicat că tocmai acuma este în toiul acestei călătorii. Ruta? Şuvalovo Leningrad[1]; despre cele ce vor urma doreşte să se sfătuiască cu mine... Din discuţii s-a lămurit că planurile „primului călător rus etc." sînt destul de nebuloase, dar în orice caz, nu intră în intenţiile lui să părăsească Rusia.

— În acest caz cum veţi întreprinde călătoria în jurul lumii? — am întrebat eu cu uimire.

— Principalul este de a parcurge distanţa din jurul globului pămîntesc, iar aceasta se poate face şi în Rusia. Zece km am şi parcurs, şi mai rămîn...

— Numai 39 990. Drum bun!

— Nu ştiu cum a călătorit „primul etc." de-a lungul drumului ce i-a mai rămas. Nu mă îndoiesc însă de faptul că el a reuşit să-şi realizeze intenţiile. Chiar dacă nu a mai călătorit de loc şi s-a înapoiat la Şuvalovo, locuind acolo fără să iasă din cadrul locului de baştină, şi în acest caz el a parcurs cel puţin 40 000 de km. Singura nenorocire constă numai în faptul că el nu este primul şi nici singurul om care a săvîrşit acest lucru. Şi dumneavoastră, şi eu, şi majoritatea celorlalţi cetăţeni au tot atîtea drepturi să se numească „călători în jurul lumii pe jos", ca şi călătorul din Şuvalovo. Aceasta pentru că oricare din noi, oricît de puţin s-ar mişca, a reuşit în decursul vieţii sale, fără să-şi dea seama, să parcurgă pe jos un drum mai lung chiar decît circumferinţa globului pămîntesc. Un mic calcul aritmetic ne va convinge de acest lucru.

În cursul unei zile petreceţi, desigur, cel puţin 5 ore în picioare: umblaţi prin camere, prin curte, pe stradă, adică într-un fel sau altul, mergeţi. Dacă aţi fi avut în buzunar un dispozitiv pentru măsurarea paşilor făcuţi, el v-ar fi arătat că zilnic faceţi cel puţin 30 000 paşi. Dar şi fără dispozitivul de măsurat paşi, este clar că distanţa parcursă de dumneavoastră zilnic este destul de mare. Chiar dacă merge foarte încet, un om

[1] Şuvalovo — o staţie mică la 10 km de Leningrad.

face pe oră 4—5 km. Considerînd că pe zi este cinci ore în picioare, el parcurge 20—25 km. Rămîne să înmulţim această cifră cu 360 şi vom afla cam cîţi km parcurge fiecare din noi în decursul unui an:

$$20 \times 360 = 7\,200 \text{ sau } 25 \times 360 = 9\,000$$

Astfel, chiar un om care se deplasează puţin, şi care nu şi-a părăsit niciodată oraşul natal, parcurge anual, pe jos, aproximativ 8 000 km. Cunoscînd că circumferinţa globului pămîntesc are 40 000 km nu este greu de calculat în cîţi ani putem face pe jos o călătorie egală cu cea în jurul lumii:

$$40\,000 : 8\,000 = 5$$

Prin urmare, în cinci ani dumneavoastră parcurgeţi un drum egal, ca lungime, cu circumferinţa globului pămîntesc. Fiecare băiat de 13 ani, dacă considerăm că el a început să meargă la vîrsta de 2 ani, a săvîrşit deja de două ori „călătoria în jurul lumii". Fiecare om la vîrsta de 25 de ani a săvîrşit cel puţin patru călătorii de acest fel. Atingînd vîrsta de 60 de ani, noi ocolim de zece ori globul pămîntesc, adică parcurgem o cale mai lungă decît de la Pămînt la Lună (380 000 km).

Acesta este rezultatul neaşteptat al calculului cu privire la un fenomen atît de cotidian, cum este plimbarea noastră prin cameră şi în afară de casă.

ASCENSIUNE PE MONT BLANC

Dacă îl veţi întreba pe poştaşul care duce zilnic scrisorile adresanţilor sau pe medicul consultant, ocupat toată ziua cu vizitarea pacienţilor, dacă au făcut ascensiunea pe Mont Blanc, ei, desigur, vor fi miraţi de această întrebare. Şi, totuşi, puteţi demonstra cu uşurinţă fiecăruia din ei că, deşi nu sînt alpinişti au săvîrşit deja ascensiunea pe o culme care depăşeşte chiar şi cele mai înalte culmi ale Alpilor. E suficient să se calculeze doar cîte trepte urcă zilnic un poştaş repartizînd scrisorile sale sau un medic vizitîndu-şi bolnavii.

Se va constata că și poștașul cel mai modest, și medicul cel mai ocupat, care nici n-au visat măcar să participe la întrecerile sportive, doboară recorduri mondiale de alpinism. Vă propunem să urmăriți acest calcul.

Fig. 57 — În decurs de un an poștașul urcă de 8 ori la înălțimea celor mai înalte piscuri din Europa.

Vom folosi pentru calcule cifre medii destul de modeste; presupunem că poștașul duce într-o zi numai zece scrisori, unor oameni care locuiesc fie la etajul al II-lea, fie la al III-lea, al IV-lea, al V-lea. În medie, luăm etajul III. Vom considera că înălțimea etajului al treilea este rotunjită la 10 m; prin urmare poștașul face zilnic ascensiuni la o înălțime de $10 \times 10 = 100$ m. Mont Blanc are o înălțime de 4 800 m. Împărțind-o cu 100 veți afla că poștașul nostru face o ascensiune pe Mont Blanc în 48 de zile...

Prin urmare, la fiecare 48 de zile, sau de aproximativ 8 ori pe an, poștașul, urcînd scările, face o ascensiune la o înălțime egală cu a vîrfului cel mai înalt din Europa. Spuneți-mi, vă rog, ce sportiv urcă de 8 ori pe an pe vîrful Mont Blanc?

În privința medicului nu am nevoie de presupuneri, pentru că sînt posesorul unor cifre reale. Medicii, care fac vizite la domiciliu în Leningrad, au calculat că

în medie, fiecare din ei, într-o zi de lucru, fac o ascensiune de 2 500 de trepte. Considerînd că înălțimea unei trepte este de 15 cm și că medicul lucrează 300 de zile pe an, obținem că într-un an medicul face ascensiuni de 112 km, adică de 20 de ori înălțimea Mont Blanc.

Dar nu este neapărată nevoie să fii poștaș sau medic pentru a parcurge asemenea distanțe, de care nici măcar nu-ți dai seama. Eu locuiesc la etajul al II-lea, într-un apartament spre care duce o scară cu 20 de trepte — un număr aparent modest. Sînt nevoit să urc această scară de 5 ori pe zi și să mai vizitez două locuințe așezate aproximativ la aceeași înălțime. În medie, se poate considera că urc zilnic de 7 ori o scară cu 20 de trepte, adică 140 de trepte pe zi. Prin urmare, cîte trepte urc în decursul unui an?

$$140 \times 360 = 50\,400$$

Zilnic urc peste 50 000 de trepte! În 60 de ani ar însemna să ajung în vîrful unei scări uriașe de 3 000 000 de trepte (450 km)! Cît de mult m-aș fi mirat dacă, pe cînd eram copil, aș fi fost dus la baza acestei scări care se ridică în infinit și dacă mi s-ar fi spus că, poate o dată voi ajunge în vîrful ei... Dar cît de mari sînt înălțimile pentru acei oameni care prin însăși profesia lor nu fac altceva decît să urce, cum sînt de exemplu liftierii?

O CĂLĂTORIE PE NESIMȚITE ÎN FUNDUL OCEANULUI

Călătorii foarte lungi efectuează locuitorii subsolurilor, funcționarii din depozitele așezate la subsol etc. Alergînd de multe ori pe zi, în sus și în jos, pe treptele

micii scări care duce la subsol, în decurs de cîteva luni ei parcurg distanţe de km întregi. Nu este greu de calculat cît timp îi trebuie unui funcţionar dintr-un depozit aşezat la subsol, să coboare astfel o distanţă egală cu adîncimea unui ocean. Dacă scara are, să zicem, numai 2 m şi omul este silit să coboare pe zi de 10 ori, atunci într-o lună el va coborî $30 \times 20 = 600$ m, iar pe an $600 \times 12 = 7\,200$ m (peste 7 km). Or cea mai adîncă mină coboară în adîncurile pămîntului numai cu 2 km şi ceva.

Fig. 58 — Un muncitor care lucrează într-un depozit de la subsol coboară în fiecare an pînă la adîncimea oceanului.

Astfel, dacă de la suprafaţa oceanului spre fundul său ar fi pusă o scară, atunci orice funcţionar dintr-un depozit aşezat la subsol ar putea pune piciorul pe fundul oceanului în numai un an.

CU TRACTORUL ÎN JURUL LUMII

Fiecare tractor lucrează pe cîmpiile colhozurilor şi sovhozurilor circa 2 500 de ore pe an. În medie el parcurge pe oră 5 km, iar într-un an:

$$5 \times 2\,500 = 12\,500 \text{ km}$$

Este uşor de văzut în cîţi ani parcurge tractorul un drum egal cu circumferinţa globului pămîntesc:

$$40\,000 : 12\,500 = 3{,}2$$

În numai 5 ani un tractor, dintre cele care lucrează în prezent în U.R.S.S., va reuși să efectueze „o călătorie în jurul lumii“ o dată și jumătate.

Evident, ne întrece pe noi, deoarece în 5 ani nu putem face decît o singură „călătorie în jurul lumii“, în schimb rămîne mult în urma locomotivei (a trenului marfar, care reușește să parcurgă pe căile ferate ale țării un drum egal cu o „călătorie în jurul lumii“, în numai opt luni trenul personal chiar în 6 luni).

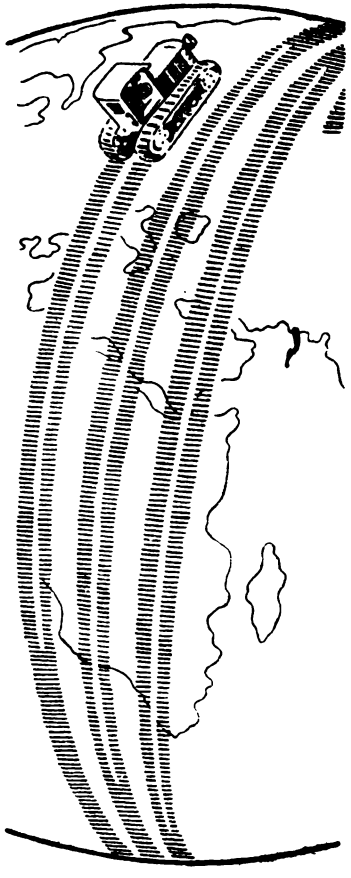


Fig. 59 — În zece ani de lucru tractorul ocolește de 3 ori globul pămîntesc.

O ROTIȚĂ NEOBOSITĂ

Mulți dintre noi deținem cîte un călător în jurul lumii în interiorul ceasului de mînă sau de buzunar. Deschideți capacul din spate al ceasului și priviți mecanismul. Rotițele lui dințate se învîrtesc atît de încet, încît la prima vedere ne par imobile. Trebuie să le urmărim mult timp și cu atenție pentru a putea observa mișcarea lor. Excepție face o singură rotiță — balansorul, care balansează neîncetat. Mișcările lui sînt atît de rapide, încît este greu să numărăm oscilațiile sale într-o secundă. Se ro-

teşte de cinci ori în decursul fiecărei secunde, cînd într-o parte, cînd în cealaltă, succesiv. Şi de fiecare dată rotiţa face o rotaţie completă şi încă o cincime din ea.

Vom încerca să numărăm cîte rotaţii execută în decursul unui an; dacă omul este grijuliu, şi nu uită să-l întoarcă la timp, ceasul nu se opreşte niciodată. În fiecare minut rotiţa face $5 \times 60 = 300$ oscilaţii, iar în fiecare oră $300 \times 60 = 18\,000$; în 24 de ore: $18\,000 \times 24 = 432\,000$ oscilaţii. Considerăm în medie că anul are 360 de zile, atunci pentru fiecare balansor avem:

$$432\,000 \times 360 = 155\,520\,000 \text{ oscilaţii.}$$

Dar balansorul face la fiecare oscilaţie $1^1/_5$ rotaţii complete. Prin urmare, în decursul unui an, rotiţa se învîrteşte în jurul axei sale de

$$155\,520\,000 \times 1^1/_5 = 186\,624\,000 \text{ ori,}$$

rotunjit de 187 000 000 ori!

Veţi rămîne şi mai uimiţi dacă încercaţi să calculaţi ce drum ar fi parcurs un automobil dacă roţile lui s-ar fi învîrtit de 187 000 000 ori. Diametrul unei roţi de automobil este de 80 cm; prin urmare, circumferinţa ei este de aproximativ 250 cm sau $2^1/_2$ metri. Înmulţind $2^1/_2$ cu 187 000 000 obţinem lungimea drumului pe care dorim s-o aflăm: circa 470 000 km.

Aşadar, dacă roţile unui automobil ar fi fost tot atît de neobosite ca şi balansorul ceasului de buzunar, ar fi ocolit anual de peste zece ori globul pămîntesc, adică ar fi parcurs o cale mai lungă decît cea de la noi pînă la Lună! Nu este greu să ne imaginăm cît timp ar fi trebuit să consumăm pentru reparaţia întregii maşini şi pentru înlocuirea roţii de automobil. Iar micuţa rotiţă a ceasului de buzunar se mişcă neobosit ani întregi, fără reparaţie, fără unsoare, fără înlocuire, lucrînd cu o precizie uimitoare.

CĂLĂTORI STÎND PE LOC

Ultimele rînduri ale cărţii aş vrea să le dedic p r i m i l o r ei cititori, fără a căror colaborare ea nu ar fi putut apare. Vorbesc, bineînţeles, despre tipografi. Şi ei

fac călătorii aritmetice îndepărtate fără a ieşi din tipografie, ba chiar stînd în picioare lîngă maşinile de tipărit. Mîna îndemînatică a muncitorilor „armatei de plumb", lunecînd în fiecare secundă pînă la caseta cu litere şi înapoi, parcurge într-un an o distanţă uriaşă. Faceţi calculul. Iată datele: tipografuI culege în decursul unei zile de lucru 12 000 de litere şi pentru fiecare literă trebuie să-şi deplaseze mîna încolo şi înapoi la o distanţă de circa jumătate de metru. Considerăm că anul are 300 de zile de lucru. Prin urmare, avem:

$$2 \times 0{,}5 \times 12\,000 \times 300 = 3\,600\,000 \text{ m},$$

adică 3 600 de km.

Deci, în 11 ani de lucru, chiar tipografuI care nu face nici un pas de lîngă caseta lui cu litere, săvîrşeşte o călătorie în jurul lumii. „Un călător nemişcat în jurul lumii!" Aceasta sună mult mai original decît „un călător în jurul lumii pe jos".

Nu se găseşte nici un om care într-un fel sau altul să nu fi săvîrşit în acest sens o călătorie în jurul lumii. Se poate spune că un om neobişnuit nu este cel ce a săvîrşit călătoria în jurul lumii, ci acela care nu a săvîrşit-o. Şi, dacă cineva încearcă vreodată să vă convingă de contrariu, acum îi veţi putea demonstra „matematic" că el nu face excepţie de la regula generală.

CURIOZITĂŢI ARITMETICE

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$6 \times \frac{6}{7} = 6 - \frac{6}{7} \qquad \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Răspunsuri:

La pag. 35

La rebusul nr. 1— imprudența
La rebusul nr. 2 — considerat

La pag. 68

1. „1 146". 2. NN, unde cu N s-a notat „cifra" 13.

La pag. 77

3. „1 304" 4. „1 144". 5. „2 402". 6. „2 010" 7. „10 210". 8. „110". 9. „10", rest „11".

La pag. 86

10. Cu baza 8. 11. Cu baza 6. 12. Numărul „una sută treizeci" în diferitele sisteme de numerație se exprimă în felul următor:

în binar „10 000 010", cu baza 6 „334",
cu baza 3 „11 211", cu baza 7 „244",
cu baza patru „2 002", cu baza 8 „202",
cu baza cinci „1 010", cu baza 9 „154".

13. În sistemul cu baza 4 „27"; cu baza 5 „38"; cu baza 6 „51"; cu baza 7 „66"; cu baza 8 „83"; cu baza 9 „102". Acest număr nu poate fi scris nici în sistemul binar și nici în cel cu baza 3, deoarece conține cifra 3, care nu există în aceste sisteme. În sistemul cu baza 5, acest număr se împarte cu 2, pentru că suma cifrelor lui se divide cu 2; în sistemul cu baza 7 el se împarte cu 6, iar în sistemul cu baza 9 nu se împarte cu 4.

MATEMATICIENI CITAȚI DE AUTOR[1]

Bobinin, Viktor Viktorovici (1849—1919)

Primul istoric al matematicii în Rusia, profesor de matematici la Universitatea din Moscova.

A închinat studiului și popularizării istoriei matematicii peste 40 de ani de viață. A scris două studii de istoria matematicii în Rusia: „Starea cunoștințelor matematice în Rusia pînă în secolul al XVI-lea" (1884) și „Studii asupra dezvoltării cunoștințelor fizico-matematice în Rusia" (1885—1888).

A înființat și editat timp de 10 ani (1885—1894) revista „Științele fizico-matematice în prezent și în trecut" (Fiziko-matematiceskie nauki v ih nastoiașcem i proședșem"). Ca supliment la această revistă — în care Bobînin a publicat multe din articolele sale — el a editat „Bibliografia fizico-matematică rusă" („Russkaia fiziko-matematiceskaia bibliografiia") (1886—1900) care și-a păstrat valoarea și azi.

Activitatea lui științifică rodnică a fost apreciată în deplină măsură numai în timpul Puterii Sovietice, cînd i s-a acordat titlul de profesor.

Campanella Tommaso (1568—1631)

Filozof italian, unul din reprezentanții comunismului utopic timpuriu.

---

[1] Anexă introdusă de Editura tineretului.

A scris mai multe opere. Cea mai de seamă este „Cetatea Soarelui“ (scrisă în 1602, editată în 1623). Aici și-au găsit reflectarea năzuințele de eliberare a maselor populare din Italia de sub jugul exploatării.

Campanella nu a putut să-și învingă concepțiile idealiste religioase, tradiționale pentru acele timpuri, și a îmbinat tendințele materialiste progresiste cu idei reacționare, învechite. Totuși el a fost un om politic de seamă, patriot și luptător curajos pentru interesele maselor asuprite.

Chuquet, Nicolas

Matematician francez, a trăit în jurul anului 1484 în Lyon. A scris o carte de algebră intitulată „Triparty“, al cărei manuscris se păstrează în Biblioteca Națională din Paris. Cartea a fost tipărită în anul 1880. În această carte se găsește modul de notare a puterilor întrebuințat și astăzi.

Fibonnacci, Leonardo (Pisano) (1180—1250)

Matematician italian. Cu opera „Liber Abaci“ a introdus cifrele indiene (numite arabe) în Europa. A scris lucrări din teoria numerelor și a rezolvat ecuații de gradul III.

Galilei Galileo (1564—1642)

Născut în Pisa și mort în Toscana. Om de știință italian multilateral. A studiat mișcările pendulului, greutatea specifică a corpurilor, fenomenele hidrostatice, căderea liberă a corpurilor etc. A fost profesor de matematică la Universitatea din Padua. Pentru invențiile amintite și pentru descoperirile în legătură cu sistemul solar, la adînci bătrînețe a suferit mult din partea inchiziției bisericești, care l-a persecutat pînă la moarte.

Kepler, Johannes (1571—1630)

Astronom german, născut în Weil der Stadt și mort în Regensburg. A descoperit legile mișcării universale:

1) orbita unei planete este o elipsă, avînd în focar Soarele;

2) dreapta trasă de la centrul planetei la centrul Soarelui (radius vector) descrie suprafețe egale în timpuri egale;

3) pătratul timpului de rotaţie al planetelor este proporţional cu cuburile distanţelor medii de la Soare.

Opera lui este „Mysterium cosmographium" (1596).

Laplace, Pierre Simon (1749—1827)

Matematician şi astronom francez, născut în Beaumont en Auge, mort la Paris. A publicat lucrări de probabilitate, stabilitate, probleme de chimie, dar renumele şi l-a cîştigat prin lucrarea de astronomie „Mécanique céleste", fiind savantul cel mai productiv şi mai fecund al astronomiei după moartea lui Newton.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716)

Filozof şi naturalist german, născut în Leipzig şi mort în Hanovra. A inventat o maşină de calculat. A descoperit şi a arătat aplicaţiile multiple şi variate ale calculului diferenţial. A scris lucrări istorice, juridice şi multe lucrări filozofice idealiste.

Leonardo da Vinci (1452—1519)

Arhitect, sculptor, pictor şi naturalist, născut în Villa Anchiana şi mort în Franţa. Artist multilateral, poet, muzician, inginer. A scris un studiu pentru elevi despre pictură. Are descoperiri în fizică, a construit pîrghii, a descoperit legile staticii, a studiat zborul păsărilor, frecarea corpurilor etc. A fost un mare matematician. A cunoscut anatomia şi studiul perspectivei.

Newton, Isaac (1643—1727)

Învăţat englez. Fondatorul fizicii matematice şi astronomiei moderne. Născut în Woolsthorpe şi mort în Kensington. Activitate ştiinţifică multilaterală. Şirul binomial, calculul diferenţial, gravitaţia generală, legile fundamentale ale mecanicii, aparate optice, teoria luminii şi alte multe probleme care l-au preocupat, l-au făcut nemuritor.

Pitagora (Pythagoras)

Filozof grec, născut în Samos, în jurul anului 575 î.e.n., mort la 500 î.e.n. Filozof idealist de la care n-a rămas nici o operă posterităţii. A înfiinţat o şcoală care a existat pînă în secolul al IV-lea î.e.n. Şcoala aceasta s-a ocupat cu arta şi ştiinţa. A interesat-o

în special matematica. Potrivit învățăturii filozofilor din această școală, numiți „pitagoricieni", în natură există numai numere care formează esența lucrurilor și toate fenomenele se bazează pe raporturile numerice. Școala aceasta plină de idei mistice, către sfîrșitul veacului al IV-lea a devenit o organizație reacționară, pledînd pentru epoca sclavagistă pe atunci în destrămare.

Struve, Vasilii Iakovlevici (1793—1864)

Cunoscut astronom și geodez rus, academician din 1832 (din 1822 membru corespondent). Îi revine un rol conducător în construirea Observatorului astronomic de la Pulkovo. A lucrat neobosit în domeniul cercetărilor astronomice și geodezice. Lucrările lui Struve și ale elevilor lui au depășit în ce privește exactitatea lor cercetările analoge efectuate la alte observatoare astronomice. Struve a fost ales membru de onoare al tuturor universităților din Rusia și al multor academii și societăți științifice din străinătate.

Tartaglia, Nicolo

Matematician italian, născut în Brescia la începutul secolului al XVI-lea, mort în anul 1557. Opera sa principală intitulată „Generale trattato di numeri et misuri" a fost cel mai apreciat manual de matematică din vremea sa.

Utred (Oughtred), William (1574—1660)

Matematician și teolog englez. În lucrarea sa „Clavis mathematicae" (Cheia matematicii), apărută în anul 1631, a introdus mai multe simboluri matematice dintre care unele se întrebuințează și astăzi.

CUPRINS

Cuvînt înainte 5

Cap. I. VECHI ŞI NOU ÎN NUMERAŢIE ŞI NUMERE

Cea mai răspîndită numeraţie scrisă..... 11
Numeraţia egipteană veche 14
Veche numeraţie populară în Rusia 15
Numeraţia romană 17
Numeraţia greacă antică. 20
Numeraţia slavă 23
Numeraţia babiloniană 23
„Simbolurile" comerciale secrete 26
Pioni în loc de cifre 27
Aritmetica la micul dejun..... 30
Rebusuri aritmetice 34
Să se găsească un număr din trei cifre..... 35
Sistemul zecimal în rafturile cu cărţi..... 37
Semnele şi denumirile aritmetice la diferite popoare 39
Curiozităţi aritmetice 40

Cap. II. VECHIUL ABAC ŞI URMAŞII SĂI

Problema cehoviană..... 41
Cum se socotea în antichitate 45
Abacul rus (sciotî) 51
Înmulţirea la abac 52
Împărţirea la abac 53
Ecouri ale vremurilor vechi 55
Curiozităţi aritmetice 56

Cap. III. PUŢINĂ ISTORIE

„Împărţirea-i treabă grea" 57
Oare noi înmulţim bine? 60
Metoda de înmulţire „rusă" 61

Din țara piramidelor 68
Curiozități aritmetice 72

Cap. IV. SISTEMELE DE NUMERAȚIE NEZECIMALE

O autobiografie misterioasă 73
Cel mai simplu sistem de numerație 77
O aritmetică neobișnuită 79
Par sau impar? 83
Probleme instructive 84
Fracții fără numitor 85
Curiozitate aritmetică 86

Cap. V. GALERIA CURIOZITĂȚILOR NUMERICE

Muzeul de curiozități aritmetice 87
Numărul 12 89
Numărul 365 92
Trei de nouă 94
Numărul Șeherazadei 95
Numărul 10 101 97
Numărul 10 001 99
Șase unități 100
Piramidele numerice 102
Nouă cifre egale 105
Scara numerică 106
Inele magice 107
O familie fenomenală 112
Curiozități aritmetice 116

Cap. VI. SCAMATORII FĂRĂ ÎNȘELĂTORIE

Arta calculatorului indian 117
Fără a deschide pungile 118
Se ghicește numărul chibriturilor. 121
„Citirea gîndurilor" după chibrituri 124
Garnitura de greutăți ideală pentru cîntar 126
Aflăm suma unor numere nescrise 130
O surpriză aparentă 134
Împărțirea instantanee 135
Cifra preferată 136
Ghicirea datei nașterii 137
Una din „operațiile distractive" ale lui Magnițki 139

Ghicirea numerelor 140
Curiozităţi aritmetice 141

Cap. VII. CALCULE RAPIDE

Fenomene reale şi imaginare 143
Memorizarea numerelor 144
„Cîte zile am?“ 147
„Cîte secunde am?“ 147
Metode de înmulţire rapidă 148
Pentru calculele cotidiene 150
Curiozităţi aritmetice 154

Cap VIII. CALCULE APROXIMATIVE

Ghicitori matematice legate de piramida lui Keops 155
Numerele aproximative 160
Rotunjirea numerelor 164
Cifre cu valori reale şi fără valoare 166
Adunarea şi scăderea numerelor aproximative 166
Înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la putere a numerelor aproximative 167
Utilizarea în practică 168
Economisirea efortului la calcule 169
Curiozităţi aritmetice 170

Cap. IX. URIAŞII NUMERICI

Cît de mare este milionul? 171
Un milion de pinioane 173
Un milion de secunde 174
O bandă dintr-un milion de fire de păr 175
Exerciţii cu milionul 176
Denumirea uriaşilor numerici 178
Miliardul 180
Trilionul 181
Numerele ultrauriaşe 182
Cel care înghite uriaşii numerici 184
Uriaşii timpului 187
Curiozităţi aritmetice 188

Cap. X. PITICII NUMERICI

De la uriaşi la pitici 189
Piticii timpului 190
Piticii spaţiului 192

Ultrauriaşul şi ultrapiticul 195
Curiozităţi aritmetice 199
Cap. XI. CĂLĂTORII ARITMETICE
Călătorie în jurul lumii 201
Ascensiune pe Mont Blanc 203
O călătorie pe nesimţite în fundul oceanului 205
Cu tractorul în jurul lumii 206
O rotiţă neobosită 207
Călători stînd pe loc 208
Curiozităţi aritmetice 209
Răspunsuri 211
Matematicieni citaţi de autor 213

Redactor responsabil: A. BALTAREŢU
Tehnoredactor: C. VULCĂNESCU

Dat la cules 26.11. 1963. Bun de tipar 11.05.1963. Apărut 1963. Comanda nr. 5807. Tiraj 30.140. Hîrtie tipar de 50 g/m² 540×840/16. Coli editoriale 10,08. Coli de tipar 13,75 A. T. 1205. C. Z. pentru bibliotecile mici 8 (A—R)

Tiparul executat sub comanda nr. 2816 la întreprinderea poligrafică „13 Decembrie 1918", str. Grigore Alexandrescu nr. 93—95, Bucureşti — R.P.R.